10.3 Wienerova filtrácia

Wienerova filtrácia je metóda najčastejšie používaná na potlačenie aditívneho šumu nezávislého na signále. Môžeme ju použiť, ak sú splnené nasledujúce 2 predpoklady:

(a) $f(n_1, n_2)$ a $v(n_1, n_2)$ sú lineárne nezávislé stacionárne náhodné procesy **s nulovou strednou hodnotou**

(b) $P_f(\omega_1, \omega_2)$ a $P_v(\omega_1, \omega_2)$ sú **<u>známe</u>** výkonové spektrálne hustoty (power spectral density, PSD) signálov $f(n_1, n_2)$ a $v(n_1, n_2)$

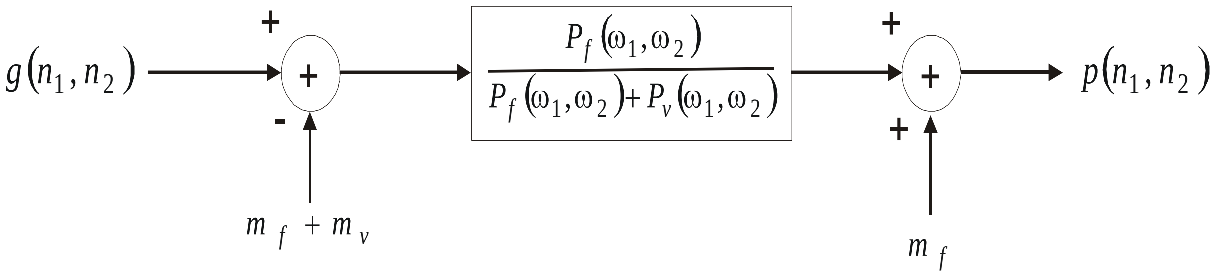
Potom **optimálny lineárny odhad minimálnej strednej kvadratickej chyby** (mean square error, MSE) odhadu originálu $f(n_1, n_2)$ dostaneme filtráciou degradovaného obrazu $g(n_1, n_2)$ Wienerovým filtrom s frekvenčnou charakteristikou

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{P_f(\omega_1, \omega_2)}{P_f(\omega_1, \omega_2) + P_v(\omega_1, \omega_2)} \tag{10.9}$$

Vzťah (10.9) predstavuje **nekauzálny Wienerov filter na odhad funkcie** $f(n_1, n_2)$. Tento filter slúži na potlačenie lineárneho poškodenia obrazu (N. Wiener a A., N. Kolmogorov , 1940)

Wienerov filter je optimálny lineárny filter z hľadiska MSE!

- úspešnosť rekonštrukcie signálu závisí od toho, ako sa nám podarí odhadnúť výkonové spektrum originálu a šumu
- odhad výkonového spektra šumu je v typických prípadoch relatívne jednoduchý (napr. v prípade korekcie zlého zaostrenia)



Obr. 10.5 Wienerova filtrácia

Ak $f(n_1,n_2)$ má strednú hodnotu m_f a $v(n_1,n_2)$ má strednú hodnotu m_v, potom

- pred filtrovaním stredné hodnoty odpočítame od degradovaného obrazu $g(n_1,n_2)$ (**Obr. 10.5**):

$$g(n_1,n_2)-(m_f + m_v) \tag{10.10}$$

- následne filtrujeme Wienerovým filtrom
- m_f na záver pripočítame k výslednému signálu

Predpokladáme, že:

$P_f(\omega_1,\omega_2)$ a $P_v(\omega_1,\omega_2)$ poznáme alebo ich vieme odhadnúť .

Odhad PSD šumu je zvyčajne možný a nie je príliš zložitý.

Odhad PSD originálu $P_f(\omega_1,\omega_2)$:

– napríklad získaním priemeru $|F(\omega_1,\omega_2)|^2$ pre veľa rôznych obrazov podobného obsahu.

– alebo modelovaním $P_f(\omega_1,\omega_2)$ jednoduchou funkciou, získanou napríklad pomocou niektorého z AR (autoregresných) modelov obrazu:

$$R_f(n_1,n_2)=\rho^{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}$$

$$P_f(\omega_1,\omega_2)=FT\left[R_f(n_1,n_2)\right] \tag{10.11}$$

Wienerov filter vo všeobecnosti realizujeme vo frekvenčnej oblasti. Rekoštruovaný obraz potom dostaneme spätnou Fourierovou transformáciou:

$$p(n_1, n_2) = IDFT[G(k_1, k_2)H(k_1, k_2)] \qquad (10.12)$$

kde

$G(k_1, k_2)$ je DFT signálu $g(n_1, n_2)$

$H(k_1, k_2)$ je DFT signálu $h(n_1, n_2)$

Veľkosť dávky DFT a inverznej DFT je $(N + M - 1) \times (N + M - 1)$

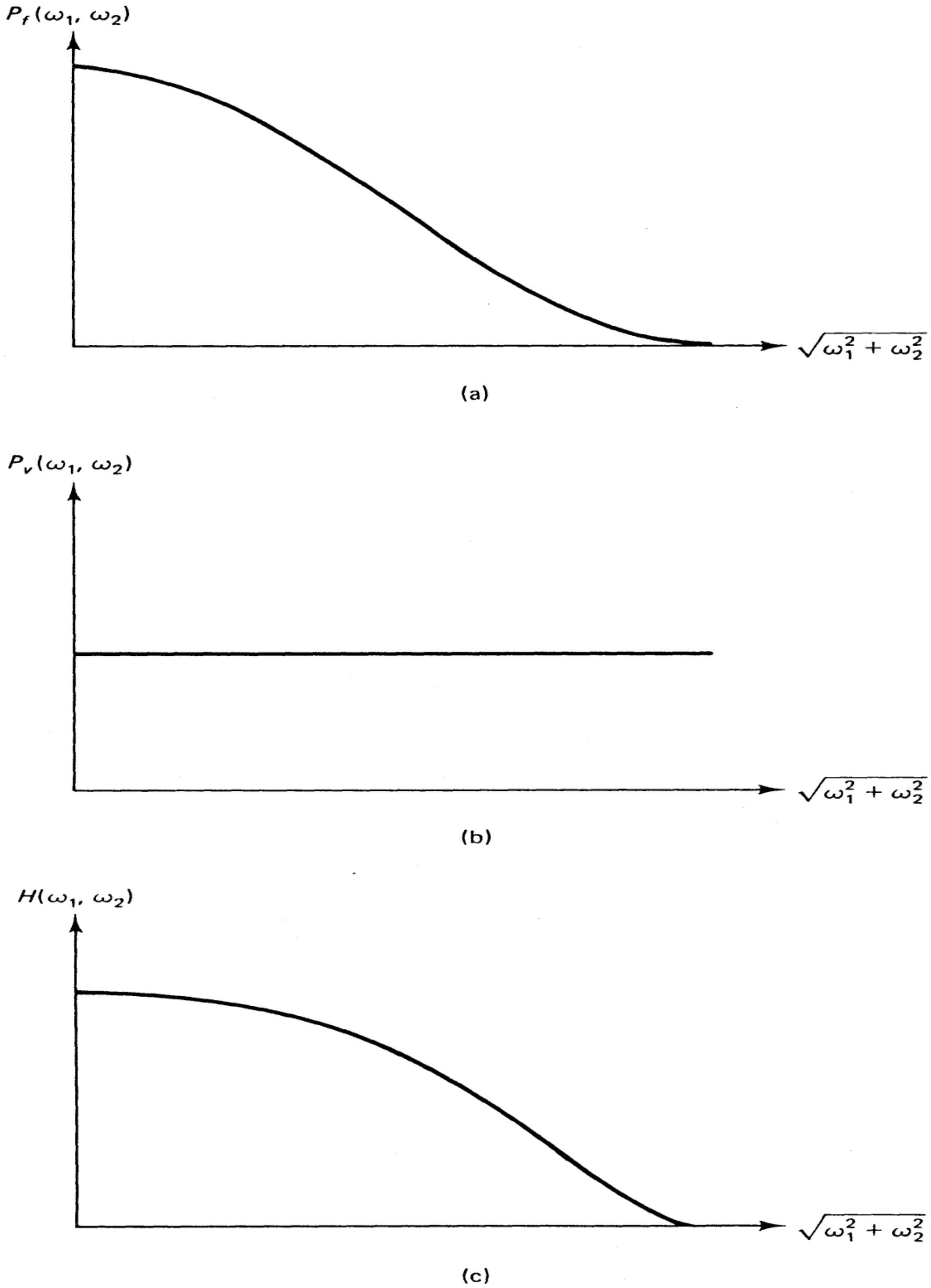
$N \times N$ je veľkosť obrazu a $M \times M$ je veľkosť filtra

Dĺžky signálov sú **konečné** ➔ vplyvom tzv. aliasingu **nie je** $p(n_1, n_2)$ identické s konvolúciou $g(n_1, n_2) * h(n_1, n_2)$ **!**

Sekvenčnú postupnosť **diskrétneho** filtra získame napríklad vzorkovaním spojitého filtra:

$$H(k_1, k_2) = H(\omega_1, \omega_2)\Big|_{\omega_1 = 2\pi k_1 / L, \omega_2 = 2\pi k_2 / L} \qquad (10.13)$$

$L \times L$ je veľkosť postupnosti DFT a IDFT



Obr. 10.6 Ilustrácia dolnopriepustného charakteru Wienerovho filtra: **(a) $P_f(\omega_1,\omega_2)$ –** typický priebeh PSD originálneho signálu; energia typického obrazu je sústredená v oblasti nízkych frekvencií, **(b) $P_v(\omega_1,\omega_2)$ –** PSD náhodného bieleho šumu; náhodný šum pozadia je vo všeobecnosti širokopásmový, **(c) $H(\omega_1,\omega_2)$ –** Wienerov filter

<u>Na objektívne porovnanie</u> dvoch obrazových signálov použijeme objektívne miery: **NMSE a normalizovanú MSE**

NMSE rekonštruovaného obrazu vzhľadom k originálu v percentách vypočítame ako:

$$NMSE\left[f\left(n_1,n_2\right), p\left(n_1,n_2\right)\right] = 100 \times \frac{Var\left[f\left(n_1,n_2\right) - p\left(n_1,n_2\right)\right]}{Var\left[f\left(n_1,n_2\right)\right]}\left[\%\right] \tag{10.14}$$

kde $Var[\cdot]$ znamená rozptyl (variancia)

NMSE degradovaného obrazu vzhľadom k originálu v percentách vypočítame ako:

$$\boldsymbol{NMSE}\left[\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right), \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right)\right] = 100 \times \frac{\boldsymbol{Var}\left[\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right) - \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right)\right]}{\boldsymbol{Var}\left[\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right)\right]}\left[\%\right] \tag{10.15}$$

Zisk v odstupe signálu od šumu (signal-to-noise ratio, SNR) pri rekonštrukcii obrazu je potom definovaný

$$SNRzisk = 10\log_{10}\frac{NMSE\left[f\left(n_1,n_2\right), g\left(n_1,n_2\right)\right]}{NMSE\left[f\left(n_1,n_2\right), p\left(n_1,n_2\right)\right]}\left[dB\right] \tag{10.16}$$

pričom samotný **odstup signálu od šumu** (SNR) môžeme určiť pomocou vzťahu

$$SNR = 10\log_{10}\frac{Var\left[f\left(n_1,n_2\right)\right]}{Var\left[v\left(n_1,n_2\right)\right]}\left[dB\right] \tag{10.17}$$

- ak máme 2 obrazy s **tým istým typom degradácie**, vo všeobecnosti sa nám javí **obraz s nižšou NMSE bližší originálu** ako obraz s vyššou NMSE.
- čím nižšia je hodnota NMSE, tým je rekonštruovaný obraz bližší originálu, no NMSE je stále len jednou z možných mier podobnosti
- pri rôznych typoch degradácie **nemusí platiť**, že nižšia hodnota NMSE automaticky znamená väčšiu **subjektívnu** zhodu s originálom

NMSE ani SNR sa vo všeobecnosti nedajú používať na porovnávanie rôznych algoritmov.

(a) (b)

(c) (d)

Obr. 10.7 Wienerova filtrácia: (a) originál, (b) obraz poškodený aditívnym šumom, (b) SNR 7 dB, NMSE 19.91%, (c) rekonštruovaný obraz, pričom bol známy len degradovaný obraz, NMSE=3,75%, (d) rekonštruovaný obraz, pričom bol známy aj originál, NMSE=16%

Pozn.:

Objektívne hodnotenie NMSE nezodpovedá subjektívnemu hodnoteniu kvality. Objektívne je lepšie (c) ale subjektívne (d)

Modifikácie Wienerovej filtrácie

- Wienerova filtrácia je založená na minimalizácii MSE medzi originálom a rekonštruovaným obrazom.
- Objektívne kritériá (ako je aj MSE) málo hovoria o subjektívnom hodnotení kvality obrazu pozorovateľom.

Boli vytvorené viaceré modifikácie Wienerovej filtrácie založené na ľudskom vnímaní.

Výkonová filtrácia – metóda filtrácie výkonového spektra. V tejto metóde používame nasledovnú frekvenčnú charakteristiku filtra

$$H(\omega_1,\omega_2)=\left(\frac{P_f(\omega_1,\omega_2)}{P_f(\omega_1,\omega_2)+P_v(\omega_1,\omega_2)}\right)^{1/2} \tag{10.18}$$

$H(\omega_1,\omega_2)$ – druhá odmocnina frekvenčnej charakteristiky Wienerovho filtra.

Ak $f(n_1,n_2)$ a $v(n_1,n_2)$ sú lineárne nezávislé vzorky stacionárneho náhodného procesu, potom rekonštruovaný obraz má výkonové spektrum zhodné s výkonovým spektrom originálu:

$$\begin{aligned} P_p(\omega_1,\omega_2) &= \left|H(\omega_1,\omega_2)\right|^2 \cdot P_g(\omega_1,\omega_2) \\ &= \left|H(\omega_1,\omega_2)\right|^2 \cdot \left(P_f(\omega_1,\omega_2)+P_v(\omega_1,\omega_2)\right) \end{aligned} \tag{10.19}$$

Dosadením (10.18) do (10.19) dostaneme:

$$P_p(\omega_1,\omega_2)=P_f(\omega_1,\omega_2) \tag{10.20}$$

Všeobecný tvar modifikácií Wienerovho filtra:

$$H(\omega_1,\omega_2)=\left(\frac{P_f(\omega_1,\omega_2)}{P_f(\omega_1,\omega_2)+\alpha\cdot P_v(\omega_1,\omega_2)}\right)^{\beta} \qquad (10.21)$$

kde α a β sú konštanty:

- Štandardný Wienerov filter : $\alpha=\beta=1$
- Výkonová filtrácia: pre $\alpha=1$ a $\beta=0,5$
- Parametrický Wienerov filter: $\beta=1$ a α – parameter

Wienerov filter – zhrnutie

- Wienerove filtre sú typicky **dolnopriepustného charakteru** s **nulovou fázou** – ovplyvňujú len magnitúdovú frekvenčnú charakteristiku signálu a neovplyvňujú fázovú frekvenčnú charakteristiku
- V každom prípade **predpokladáme, že PSD šumu a originálu sú známe, resp. ich vieme určiť**.
- Filtre sú najčastejšie implementované pomocou DFT a IDFT.
- Redukujú šum, ale tiež čiastočne **zahmlievajú obraz**.
- **Wienerov filter** minimalizuje MSE medzi rekonštruovaným obrazom a originálom (rôzne „ad hoc“ modifikácie Wienerovho filtra sa snažia vystihnúť vnímanie kvality obrazu ľudským zrakom; MSE nekorešponduje s hodnotením HVS)