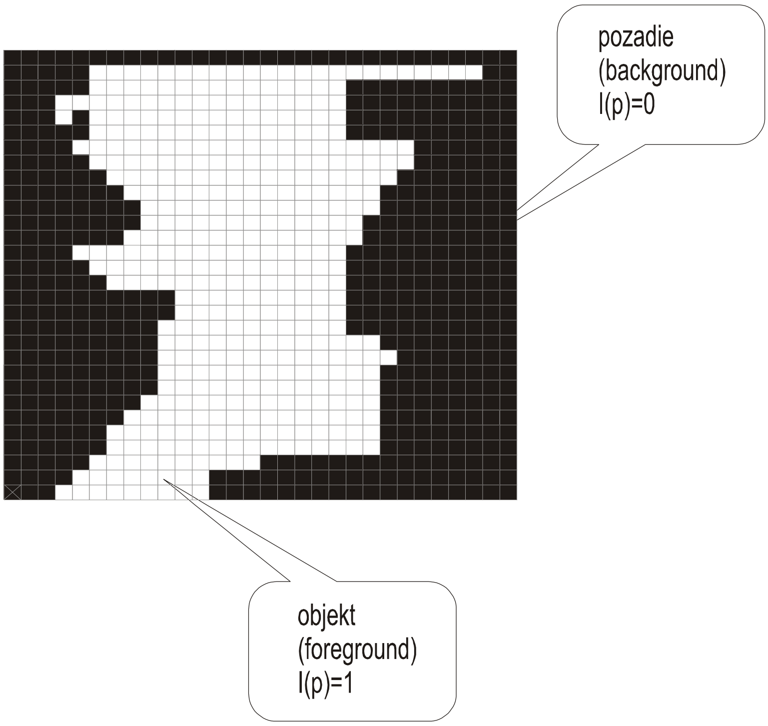
5.1. Morfologické operácie na binárnych obrazoch

V binárnej matematickej morfológii pracujeme s binárnymi obrazmi, teda s dvojicami celých čísel. Množinou bielych bodov je tvorený objekt (foreground) a množinou čiernych bodov je tvorené pozadie (background). Definičným oborom pre binárnu matematickú morfológiu je teda dvojrozmerný euklidovský priestor E^2.



Obr. 5.1 Binárny obraz

Na obr. 5.1 každý štvorček predstavuje jeden bod obrazu (pixel). Body objektu majú hodnotu 1 a body pozadia majú hodnotu 0.

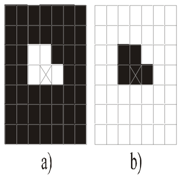
Pri binárnych obrazoch sú hodnoty štrukturálneho prvku ale i samotného binárneho obrazu z množiny *{0,1}*. Základnými morfologickými operáciami sú dilatácia a erózia. Ako sa ďalej dozvieme, tieto operácie sa často navzájom kombinujú. Takto vytvárajú ďalšie morfologické operácie, ktoré je už možné použiť pri spracovaní binárnych, monochromatických či farebných obrazov.

Základné výrazy v binárnej matematickej morfológii

Väčšina výrazov používaných v binárnej matematickej morfológii je známa z množinovej teórie.

Bodová množina

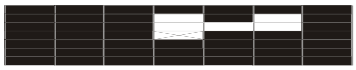
Bodová množina pre binárne obrazy je definovaná ako množina súradníc obrazových bodov, ktoré patria do objektu. Pri bodových množinách sa zvykne zvýrazniť začiatok. V našom prípade je označená krížikom. Príklad bodovej množiny $A = \{(0,0);(0,1);(0,2);(1,1);(2,1);(2,2)\}$ je na obr. 5.2.



Obr. 5.2 Bodová množina A

Doplnok

Doplnok (alebo pozadie) sa označuje A^c, je definovaný vzťahom:



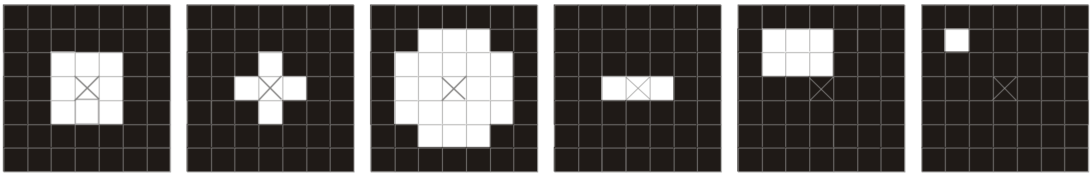
(5.1)

$$A^c = \{x \in E^2 : x \notin A\}.$$

Obr.5.3 (a) Bodová množina A , (b) doplnok bodovej množiny A^C

Štrukturálny element

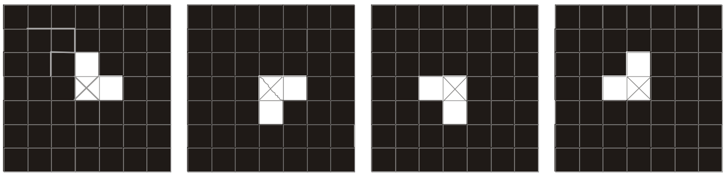
Štrukturálny element je tiež bodová množina, ale skladá sa z menšieho počtu bodov, ako bodová množina, ktorá znázorňuje objekt. Definuje tvar a veľkosť morfologického filtra. Obsahuje tiež jeden významný bod, nazýva sa reprezentatívny (origin), je označená krížikom.



Obr. 5.4 Rôzne druhy štrukturálnych elementov

Rotačný štrukturálny element

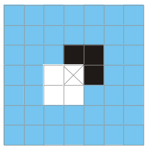
Je súbor niekoľkých štrukturálnych elementov, ktoré vznikli pootočením pôvodného štrukturálneho elementu o určitý uhol. Označuje sa $\{B\} = B^1, B^2, ...B^n$.



Obr. 5.5 Rotačný štrukturálny element otáčajúci sa o 90 stupňov
$\{B\} = B^1, B^2, B^3, B^4$

Zložený štrukturálny element

Zložený štrukturálny element je dvojica disjunktných (neprekrývajúcich sa) množín $B=(B_1,B_2)$, kde B_1 a B_2 sú štrukturálne elementy.



Obr. 5.6 Príklad na zložený štrukturálny element, biele pixely tvoria štrukturálny element B_1 a čierne štrukturálny element B_2, modré pixely tvoria pozadie

Morfologická operácia

Morfologická operácia ψ je relácia medzi bodovou množinou A a štrukturálnym elementom B. Štrukturálny element B systematicky prechádza bodovú množinu A a jej vzťah ku obrazu sa v každej pozícii reprezentatívneho bodu ukladá do výstupného obrazu.

Duálna morfologická operácia

Ku každej morfologickej operácii $\psi(A)$ existuje duálna morfologická operácia $\psi^*(A)$, ktorá je definovaná nasledovne:

$$(A)_b = \{c \in E^2 : c = a + b, a \in A\}. \tag{5.2}$$

Extenzívna operácia (extensivity)

Operácia, po aplikácii ktorej je výstupný obraz vždy väčší ako vstupný, sa nazýva extenzívna. Platí:

$$\psi(A) = \left(\psi^*\left(A^C\right)\right)^C \tag{5.3}$$

Anti-extenzívna operácia (anti-extensivity)

Operácia, po aplikácii ktorej je výstupný obraz vždy menší ako vstupný, sa nazýva anti-extenzívna. Platí:

$$\psi[\psi(X)] = \psi(X) \tag{5.4}$$

Idempotencia

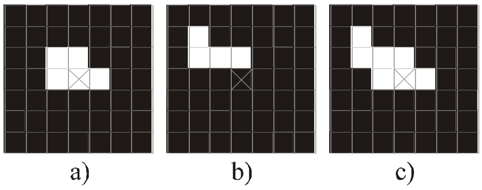
Pojem, ktorý v matematickej morfológii znamená, že použitie danej morfologickej operácie na obraz už nemá žiadny vplyv. Po použití morfologickej operácie bude výstupný obraz rovnaký ako vstupný. Idempotenciu zapisujeme nasledovne:

$$X \subseteq \psi(X) \tag{5.5}$$

Translácia

Translácia bodovej množiny A o vektor $b = (b_1, b_2)$ sa označuje A_b a je definovaná vzťahom:

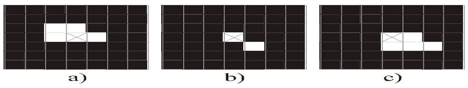
$$X \supseteq \psi(X) \tag{5.6}$$



Obr. 5.7 (a) Bodová množina A; (b) štrukturálny element B; (c) translácia bodovej množiny A_b

Súmernosť

Súmernosť bodovej množiny A sa označuje $\hat{A}$ a je definovaná vzťahom:



(5.7)

$$\hat{A} = \{x \in E^2 : x = -a, a \in A\}.$$

Obr. 5.8 (a) Bodová množina A, (b) súmerná bodová množina $\hat{A}$

Súčet

Súčet bodovej množiny A a B sa definuje nasledovne:

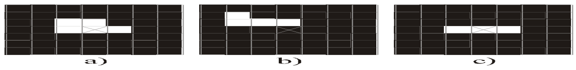
(5.8)

$$A + B = \{x \in E^2 : (x \in A) \vee (x \in B)\} = A \cup B$$

Obr. 5.9 (a) Bodová množina A, (b) bodová množina B, (c) súčet bodových množín

Rozdiel

Rozdiel bodovej množiny A a B sa definuje nasledovne:



(5.9)

$$A-B=\left\{x\in E^2:(x\in A),(x\notin B)\right\}$$

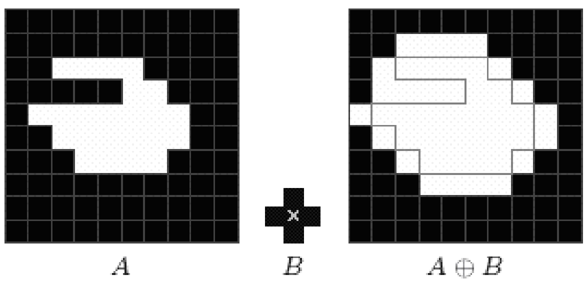
Obr.5.10 (a) Bodová množina A, (b) bodová množina B , (c) rozdiel bodových množín

Dilatácia binárneho obrazu - Minkowského súčet

Dilatácia je relácia $\oplus$, ktorá skladá body dvoch množín pomocou Minkowského súčtu. Pojem Minkowského súčet zaviedol v roku 1889 Hermann Minkowski. Patrí k dvom základným morfologickým operáciám, ktoré sa využívajú v spracovaní binárnych, monochromatických alebo farebných obrazov. Označujeme ju $A\oplus B$ a definovaná je vzťahom *(5.10.)*:

$$A\oplus B=\{p\in E^2 : p=a+b, a\in A, b\in B\} \qquad (5.10)$$

Dilatáciu binárneho obrazu môžeme chápať ako posúvanie štrukturálneho prvku po obraze a hľadanie nenulového bodu na obraze. Ak sa začiatok štrukturálneho prvku práve prekrýva s bodom objektu na obraze, obraz sa v tomto mieste prekreslí podľa tvaru štrukturálneho prvku (zjednotenie množín) a ďalej pokračuje posúvanie štrukturálneho prvku do ďalšieho bodu objektu.



a) b) c)

Obr. 5.11 Dilatácia binárneho obrazu *A* štrukturálnym prvkom *B*.

a) originál, b) štrukturálny prvok, c) dilatovaný binárny obraz

Dilatácia zväčšuje objekt, zapĺňa malé diery a úzke zálivy. Je základom pre zložitejšie operácie. Pretože zväčšuje objekty, kombinuje sa s eróziou, aby sa zachovala pôvodná veľkosť objektu.

Vlastnosti dilatácie $A \oplus B$:

komutatívnosť $A \oplus B = A \oplus X$

asociatívnosť $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

invariantnosť voči posunu $A_h \oplus B = (A \oplus B)_h$

rastúca transformácia $A \subseteq C \Rightarrow A \oplus B \subseteq C \oplus B$

keď je reprezentatívny bod prvkom štrukturálneho elementu, potom $A \subseteq A \oplus B$

$A \oplus \varnothing = \varnothing$

keď štrukturálny element B obsahuje len jeden prvok b, potom dilatácia je posunutím množiny A, t.j. $A \oplus \{b\} = A + b.$; špeciálne $A \oplus \{O\} = A_a$, $A \oplus \{O, b\} = A \cup (A + b)$

Nech c je daná kladná konštanta, potom $c(A \oplus B) = cA \oplus cB$

keď je $A \subset B$, potom pre každú množinu C platí $(A \oplus C) \subset (B \oplus C)$ a z komutatívneho zákona vyplýva $(C \oplus A) \subset (C \oplus B)$

v prípade, že A a B sú kružnice s polomermi a a b, potom aj $A \oplus B$ je kružnica s polomerom a+b

keď A a B sú štvorce so stranami a a b, potom aj $A \oplus B$ je štvorec so stranami a+b

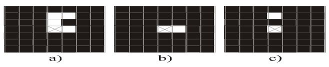
Erózia binárneho obrazu – Minkowského rozdiel

Erózia skladá dve množiny pomocou Minkowského rozdielu. Pojem Minkowského rozdiel zaviedol G. Matheron v roku 1967. Erózia je duálna morfologická operácia k dilatácii (ale nie inverzná).

Erózia je po dilatácii druhou základnou morfologickou operáciou v spracovaní obrazov. Označujeme ju $A \Theta B$ a definovaná je vzťahom *(2)*:

$$A \Theta B = \{p \in E^2 : p + b \in A, pre \, \forall b \in B\} \qquad (5.11)$$

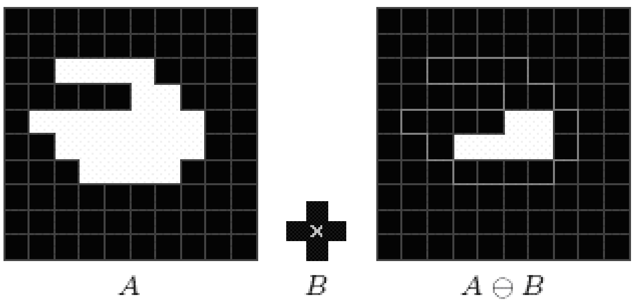
Erózia podľa tejto definície pre každý bod p overuje, či pre všetky možné p+b leží výsledok v A. Ak áno, tak je výsledok 1 (biely bod), ak nie, tak je výsledok 0 (čierny bod). Na obr. 10. (a) je bodová množina $A = \{(0,0);(1,0);(0,1);(0,2);(1,2)\}$, na obr.10. (b) je štrukturálny element $B = \{(0,0);(1,0)\}$. Výsledok ich erózie je znázornený na obr.10. (c) a obsahuje nasledovné body:



$$A \Theta B = \{(0,0);(0,2)\}$$

Obr. 5.12 (a)Bodová množina A, (b)štrukturálny element B, (c) erodovaný obraz

Eróziu binárneho obrazu môžeme chápať aj ako posúvanie štrukturálneho prvku po obraze a hľadanie miesta, kde sa štrukturálny prvok prekrýva s bodom objektu na obraze. Ak sa štrukturálny prvok úplne prekrýva s objektom na obraze, zostáva zachovaný bod objektu v mieste začiatku štrukturálneho prvku. Ostatné body objektu sú potlačené. Posúvanie štrukturálneho prvku pokračuje ďalej po celom obraze.



a) b) c)

Obr. 5.13 Erózia binárneho obrazu *A* štrukturálnym prvkom *B*.

a) originál, b) štrukturálny prvok, c) erodovaný binárny obraz

Výsledkom erózie je zmenšenie obrazu a odstránenie malých (vzhľadom na veľkosť štrukturálneho prvku) a svetlých miest na obraze.

Vlastnosti erózie $A\Theta B$:

nie je komutatívna: $A\Theta B \neq B\Theta A$

asociatívnosť: $A\Theta(B\Theta C) = (A\Theta B)\Theta C$

je prienikom všetkých posunutých množín A_{-b}: $A\Theta B = \bigcap_{b\in B} A_{-b}$

invariantnosť vzhľadom na posunutie: $A_h\Theta B = (A\Theta B)_h$, $A\Theta B_h = (A\Theta B)_{-h}$

$$A\Theta B \subseteq A$$

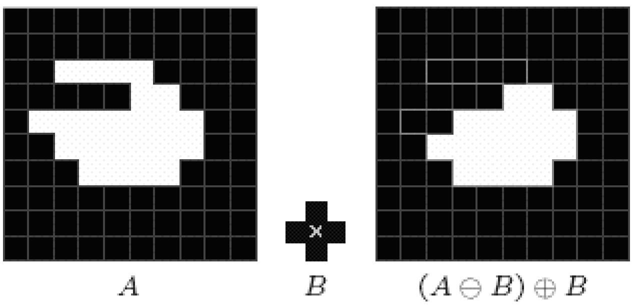
$$A \subseteq C \Rightarrow A\Theta B \subseteq C\Theta B$$

$$C \subseteq B \Rightarrow A\Theta B \subseteq A\Theta C$$

Otvorenie binárneho obrazu

Ďalšie morfologické operácie sú kombináciou už spomínaných dvoch základných morfologických operácií, dilatácie a erózie. Otvorenie binárneho obrazu štrukturálnym prvkom predstavuje eróziu s následnou dilatáciou práve erodovaného binárneho obrazu. Otvorenie binárneho obrazu *A* štrukturálnym prvkom *B* označujeme $A \circ B$ a definované je vzťahom *(5.12.)*:

$$A \circ B = (A\Theta B) \oplus B \tag{5.12}$$



a) b) c)

Obr. 5.14 Otvorenie binárneho obrazu *A* štrukturálnym prvkom *B*.

a) originál, b) štrukturálny prvok, c) otvorený binárny obraz

Otvorením binárneho obrazu dostaneme obraz, z ktorého boli odstránené malé svetlé oblasti (výsledok erózie), pričom veľkosť binárneho obrazu zostala relatívne nezmenená (vďaka účinku následnej dilatácie).

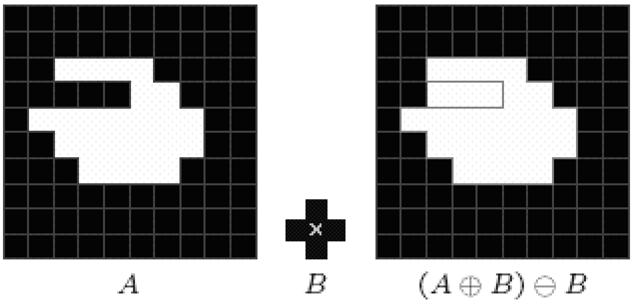
Vlastnosti otvorenia $A \circ B$:

$$A \circ B = (A \circ B) \circ B$$
$$A \circ B \subseteq A$$
$$A \subseteq C \Rightarrow A \circ B \subseteq C \circ B$$

Zatvorenie binárneho obrazu

Zatvorenie binárneho obrazu štrukturálnym prvkom predstavuje dilatáciu, ktorá je nasledovaná eróziou práve dilatovaného binárneho obrazu. Zatvorenie binárneho obrazu *A* štrukturálnym prvkom *B* označujeme $A \bullet B$ a definované je vzťahom *(5.13)*:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \Theta B \tag{5.13}$$



a) b) c)

Obr. 5.15 Zatvorenie binárneho obrazu *A* štrukturálnym prvkom *B*.
a) originál, b) štrukturálny prvok, c) zatvorený binárny obraz.

Zatvorením binárneho obrazu dostaneme obraz, z ktorého boli odstránené malé tmavé oblasti (výsledok dilatácie), pričom veľkosť binárneho obrazu zostala relatívne nezmenená (vďaka účinku následnej erózie).

Vlastnosti zatvorenia $A \bullet B$:

$$A \bullet B = (A \bullet B) \bullet B$$
$$A \subseteq A \bullet B$$
$$A \subseteq C \Rightarrow A \bullet B \subseteq C \bullet B$$

Hit or miss -Traf či miň

Doteraz popisované operácie testovali pomocou štrukturálneho elementu B výskyt bodov v bodovej množine A. Táto operácia však testuje aj to, či nejaké body do A nepatria. Transformácia hit or miss používa zložený štrukturálny element. Operácia hit or miss je morfologická transformácia definovaná vzťahom:

$$A * B = \{a : B_1(a) \subset A \wedge B_2(a) \subset A^C\} \tag{5.14}$$

Bod pod reprezentatívnym bodom štrukturálneho elementu patrí do výslednej množiny, ak sú splnené dve podmienky. Časť zloženého štrukturálneho elementu B_1 s reprezentatívnym bodom patrí do bodovej množiny A a súčasne B_2 leží mimo bodovej množiny A, čiže leží v pozadí. Štrukturálny element B_1 testuje objekty a B_2 pozadie.

Transformáciu $*$ možno vyjadriť aj pomocou dilatácie a erózie:

$$A * B = (A \Theta B_1) \cap (A^C \Theta B_2) \tag{5.15}$$

$$A * B = (A \Theta B_1) - (A^C \Theta B_2) \tag{5.16}$$

$$A * B = (A \Theta B_1) - \left(A \oplus \check{B}_2\right) \tag{5.17}$$

Na obr. 5.16. je zobrazená bodová množina A. Rohy objektu A nájdeme pomocou operácie hit or miss. Treba poznamenať, že to, aké rohy nájdeme, závisí od použitých štrukturálnych elementov. Aby sme našli čo najviac rohov, používame rotačné štrukturálne elementy, ktoré vidíme na obr. 5.16. Biele body zloženého štrukturálneho elementu tvoria body, ktoré budú testovať objekt a čierne body budú testovať pozadie. Farebné body tvoria množinu bodov, na ktorých pozícii nezáleží. Farebnými obrysmi sme znázornili, ktoré rohy sme našli pomocou ktorého štrukturálneho elementu. Výsledok transformácie obrazu operáciou hit or miss týmito rotačným štrukturálnymi elementmi vidíme na obr 5.16. Je zjavné, že sme nenašli všetky rohy objektu. Na nájdenie ostatných rohov by sme museli použiť ďalšie štrukturálne elementy iných tvarov.

Operácia hit or miss sa používa na:

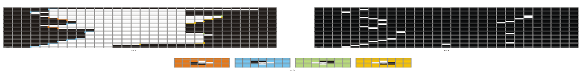
- hľadanie rohov objektov
- je súčasťou operácie thinning (stenčovanie)

$$A \otimes B = A - \left(A \circledast B\right) = A \cap \left(A \circledast B\right)^{c}$$

Obr. 5.16 (a) Bodová množina A, (b) rotačné štrukturálne elementy B, (c) nájdené rohy A

5.1.4. Thinning- Stenčovanie

Thinning je morfologická operácia charakteristická najmä pre binárne obrazy. Využíva sa v mnohých aplikáciách, ale najväčší význam má pri skeletovaní. Pre pochopenie operácie thinning je dôležité poznať princípy morfologickej operácie hit or miss. Operácia thinning je definovaná nasledovne:



(5.18)

Z definície je zrejmé, že najprv sa vykoná operácia hit or miss na množine A pomocou množiny B a následne sa táto novovzniknutá množina odčíta od pôvodnej množiny A. Môžeme si to predstaviť aj tak, že sa vždy nájdu rohy objektu a potom sa z objektu odstránia. V podstate sa vždy „odlupuje“ navrchnejšia vrstva objektu, čím sa dosiahne jeho stenčenie.

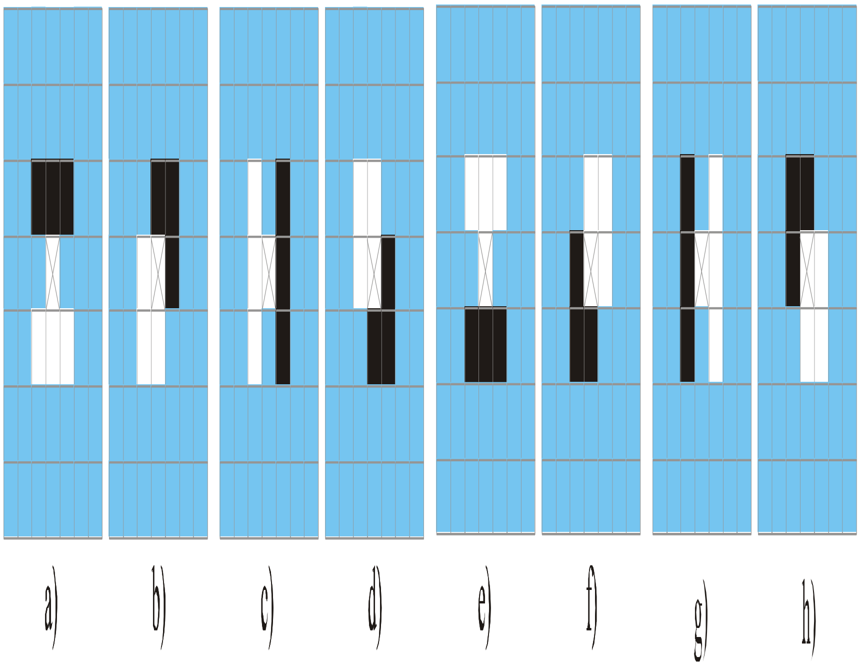
V súvislosti s touto operáciou sa veľmi často používa pojem sekvenčné stenčovanie. Ide o transformáciu, ktorá využíva postupnosť zložených štrukturálnych elementov, čiže rotačný štrukturálny element, ktorý sme zaviedli v kap. 1.1.4. Príklad na rotačný štrukturálny element, pomocou ktorého predvedieme túto operáciu, je na obr. 5.17.

$$A \otimes \{B\} = \left(\left(\ldots\left(\left(A \otimes B^1\right) \otimes B^2\right)\ldots\right) \otimes B^n\right)$$

Obr. 5.17 (a) B^1; (b) B^2; (c) B^3; (d) B^4; (e) B^5; (f) B^6; (g) B^7; (h) B^8

S využitím tohto štrukturálneho elementu môžeme zapísať operáciu thinning nasledovne:

(5.19)



Obr. 5.18 (a) bodová množina A; (b) $A_1 = A \otimes B^1$; (c) $A_2 = A_1 \otimes B^2$; (d) $A_3 = A_2 \otimes B^3$; (e) $A_4 = A_3 \otimes B^3$; (f) $A_5 = A_4 \otimes B^4$; (g) $A_6 = A_5 \otimes B^3$; (h) $A_8 = A_6 \otimes B^{7,8}$; (i) $A_{8,4} = A_8 \otimes B^{1,2,3,4}$; (j) $A_{8,5} = A_{8,4} \otimes B^5$; (k) $A_{8,6} = A_{8,5} \otimes B^6$;(l) $A_{8,6}$

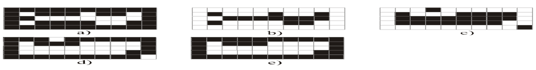
Inými slovami najprv stenčíme množinu A štrukturálnym elementom B^1, následne výsledok stenčíme štrukturálnym elementom B^2 a takto budeme ďalej pokračovať, až kým nevykonáme operáciu thinning aj so štrukturálnym elementom B^n. Celý tento proces opakujeme až do momentu, v ktorom sa už na obrázku neprejavia ďalšie zmeny. Jednotlivé kroky tohto procesu sú na obr. 16. Na obr. 16(l) je bodová množina, ktorú už nemá zmysel ďalej stenčovať, preto je výsledkom aplikácie tejto operácie.

5.1.5. Thickening- Zhrubnutie

Táto morfologická operácia je duálnou k predchádzajúcej operácii thinning. Je definovaná takto:

$$A \mathrm{O} B = A \cup \left(A * B\right) \tag{5.20}$$

Podobne ako pri stenčovaní, môžeme aj pri tejto operácii zaviesť pojem sekvenčného zhrubnutia, ktorý využíva rotačný štrukturálny element. Zápis takéhoto zhrubnutia je nasledovný:



(5.21)

Operácia thickening je však v praxi málo používaná. Namiesto toho sa využíva stenčovanie pozadia. Dôvod je jednoduchý. Často sa stáva, že po vykonaní thickening-u sa na výslednej množine vyskytnú body nespojitosti, teda body, ktoré nám „kazia“ výsledný dojem. Preto sa v takomto prípade po použití tejto operácie vykonáva ešte úprava na odstránenie týchto bodov. Príklad na stenčovanie pozadia vidíme na obr. 5.19.

$$A \mathrm{O} \{B\} = \left(\left(\ldots\left(\left(A \mathrm{O} B^{1}\right) \mathrm{O} B^{2}\right)\ldots\right) \mathrm{O} B^{n}\right)$$

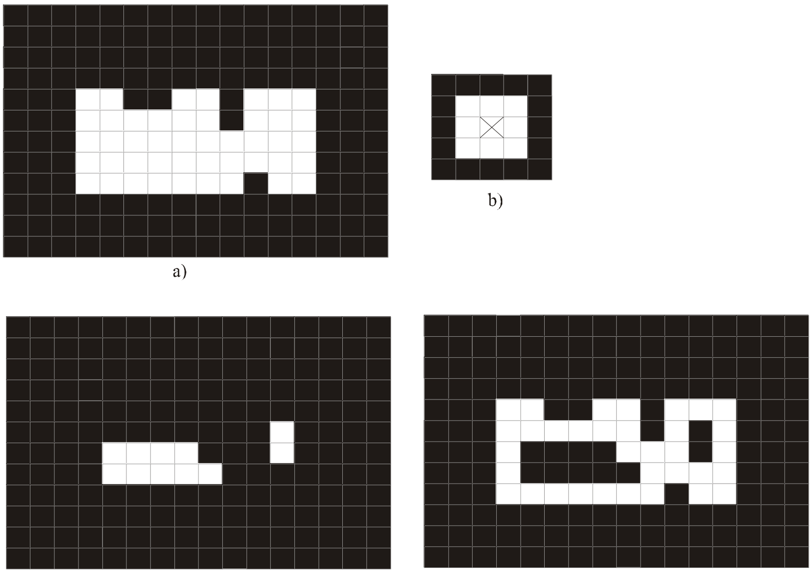
Obr. 5.19 (a)Bodová množina A; (b)komplementárna bodová množina A^c; (c)výsledok thinningu A^c; (d)komplement možiny z obr c.; (e)výsledok po stenčení pozadia

Hľadanie hrán objektu

Hľadanie hrán objektu je veľmi jednoduchou morfologickou operáciou. Hrany množiny A označujeme $\partial(A)$ a získame ho rozdielom množiny A a prvej erózie množiny A s vhodným štrukturálnym elementom B:

$$\partial(A) = A - (A \Theta B) \quad (5.22)$$

Ukážeme si príklad, v ktorej budeme hľadať hrany bodovej množiny na obr. 1.19(a). Na obr. 5.20(b) vidíme štrukturálny element B, ktorý na hľadanie použijeme. Tento štrukturálny element patrí k najčastejšie používaným, nie je však jediným. Od rozmeru štrukturálneho elementu závisí hrúbka hrany množiny A. Najprv vykonáme eróziu bodovej množiny A štrukturálnym elementom B, výsledok je znázornený na obr. 5.20(c). Potom od pôvodnej množiny A odčítame erodovanú množinu A. Nájdené hrany objektu sú na obr. 5.20 (d).



Obr. 5.20 (a)Bodová množina A; (b)štrukturálny element B; (c)erózia A; (d)hrany A

Skelet

Skeletovanie je proces, ktorý premieňa obraz na kostrový pozostatok. Skelet je v spracovaní obrazov veľmi užitočný, pretože poskytuje jednoduchú a kompaktnú reprezentáciu tvaru objektu. Zachováva informácie o veľkosti a o topológii pôvodného objektu. Najmä tenké a podlhovasté objekty sa často zjednodušujú použitím kostry.

Čo vlastne skelet je, nám pomôže pochopiť nasledujúci príklad. Predstavme si nejaký ľubovoľný objekt, ktorý zapálime. Objekt začne horieť a rovnomerne horí celý jeho okraj. V momente, keď sa v nejakom bode stretnú dva rozličné okraje, oheň sa automaticky uhasí. Dostávame tzv. uhasený riadok. Tento riadok bude tvoriť skelet nášho objektu.

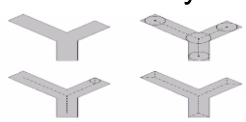
Ďalší spôsob akým si môžeme vysvetliť vytvorenie skeletu, je spôsob vpisovania maximálnych kruhov. Maximálny kruh B vpísaný do bodovej množiny A sa dotýka okraju bodovej množiny (hrany) ∂A v dvoch a viacerých bodoch. Skelet bodovej množiny A potom vznikne zjednotením stredov týchto vpísaných bodov. Celý proces tohto spôsobu vytvárania skeletu je veľmi jednoducho znázornený na obr.5.21.

$$S_k(A) = \bigcup_{k=0}^{K} \{(A \Theta kB) - [(A \Theta kB) \circ B]\}$$

Obr. 5.21 Vytváranie skeletu

Existuje ešte niekoľko možných spôsobov vytvárania skeletu. Výsledky jednotlivých princípov sa často mierne odlišujú. Všetky spôsoby sa však snažia odstrániť čo najviac bodov objektu, pričom sa snažia zachovať jeho najpodstatnejšie body, ktoré najviac prezrádzajú o jeho tvare a veľkosti.

Za spomenutie stojí, že princíp sekvenčného stenčovania, ktoré sme uviedli v kap. 1.4 je tiež spôsobom vytvárania skeletu. Existuje aj spôsob skeletovania, ktorý využíva operácie erózie a otvorenia. Je definový takto:



(5.23)

kde

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^{K} S_k(A) \tag{5.24}$$

výraz $(A\Theta kB)$ v tomto zápise znamená k-násobnú eróziu:

$$(A\Theta kB) = (((..(A\Theta B)\Theta B))\Theta ...)\Theta B \tag{5.25}$$

Erózia sa zastaví vtedy, kedy by už nasledovná erodovaná množina bola prázdna. Inými slovami

$$K = \max\{k | (A\Theta kB) \neq 0\} \tag{5.26}$$

Výsledný skelet sa skladá z viacerých podmnožín skeletovania. Pomocou týchto podmnožín vieme duálnymi operáciami našu pôvodnú množinu zrekonštruovať. Rekonštrukcia bodovej množiny A je definovaná takto:

$$A = \bigcup_{k=0}^{K} (S_k(A) \oplus kB) \tag{5.27}$$

kde $(S_k(A) \oplus kB)$ znamená k-násobnú dilatáciu:

$$(A \oplus kB) = (((..(A \oplus B) \oplus B)) \oplus ...) \oplus B \tag{5.28}$$

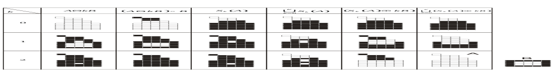
Vytvorenie skeletu a následné zrekonštruovanie bodovej množiny je znázornené na obr. 5.22. V prvom stĺpci sa nachádza pôvodná bodová množina a jej prvá a druhá erózia. V druhom stĺpci sú znázornené jednotlivé otvorenia týchto erodovaných množín. V treťom stĺpci sú množiny, ktoré vznikli odčítaním množín v druhom stĺpci od množín v prvom stĺpci. Vo štvrtom stĺpci dole vidíme skelet pôvodnej bodovej množiny, ktorá vznikla zjednotením množín v treťom stĺpci. Piaty a šiesty stĺpec zobrazujú proces rekonštrukcie. Najprv sa vykonajú dilatácie množín vo štvrtom stĺpci a zjednotením týchto dilatovaných množín dostaneme pôvodnú množinu, ktorá je znázornená vprvo dole. Vedľa tabuľky sa nachádza štrukturálny element, ktorý sme pri tejto operácii skeletovania použili.

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A, \quad k = 1,2,3...$$

Obr. 5.22 Vytvorenie skeletu a rekonštrukcia pôvodného objektu; skelet je v 4.stĺpci dole; rekonštruovaná množina v 6. stĺpci dole; použitý štrukturálny element vpravo vedľa tabuľky

Extrakcia spojitých komponentov

Táto operácia slúži na nájdenie všetkých bodov jednotlivých komponentov v obraze. Pod komponentom budeme rozumieť súvislú množinu, ktorej body majú hodnotu 1, teda patria do objektu. Keď je objekt súvislý, tak tvorí jeden komponent. V prípade, že objekt nie je súvislý, tak sa skladá z viacerých komponentov - častí. Pre použitie tejto operácie je potrebné poznať jeden pod p z daného komponentu. Definícia operácie je nasledovná:



(5.29)

kde $X_0 = p$, *B* je štrukturálny element a A predstavuje body obrazu. Iterácia sa zastaví vtedy, keď $X_k = X_{k-1}$. Potom sa $Y = X_k$

Príklad na aplikáciu tejto morfologickej operácie je na obr. 5.23. Na obr. 5.23(a) je bielymi bodmi vyznačená bodová množina. Modrý bod je bod objektu, ktorý slúži ako vstupný údaj pre našu operáciu, čiže je to bod p. Na obr. 5.23(b) je použitý štrukturálny element. Obr. 5.23(c)-(d) znázorňujú čiastkové výsledky po prvej resp. druhej iterácii. Na obr. 5.23 (e) vidíme výsledok tejto operácie, postupnou iteráciou sa našiel každý bod objektu.

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^C, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

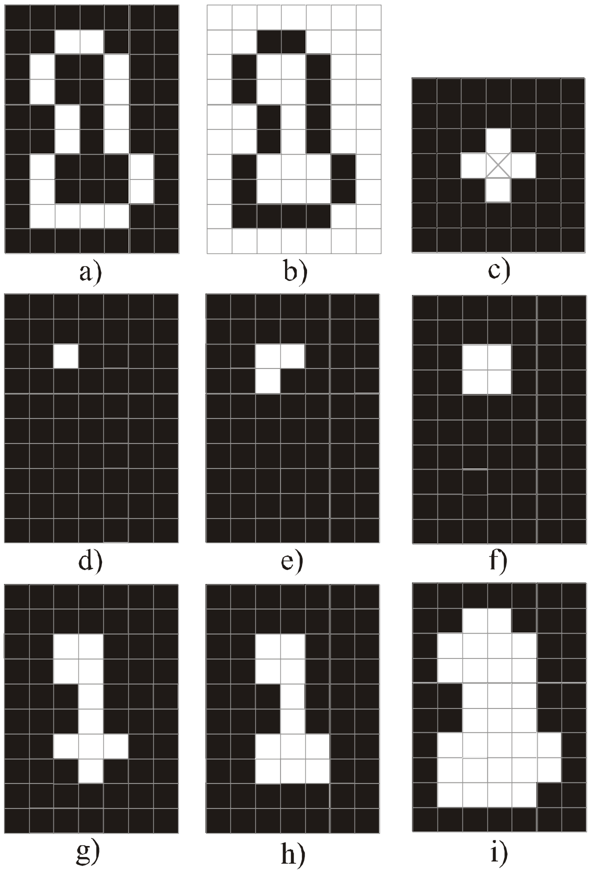
Obr. 5.23 (a)Bodová množina A; (b)štrukturálny element B; (c)prvá iterácia; (d)druhá iterácia; (e)výsledok-nájdené body objektu

Vyplnenie oblasti

V tejto kapitole si vysvetlíme jednoduchú morfologickú operáciu na vyplnenie oblasti. Táto operácia využíva dilatáciu, komplementárnu množinu a prienik, je definovaná nasledovne:

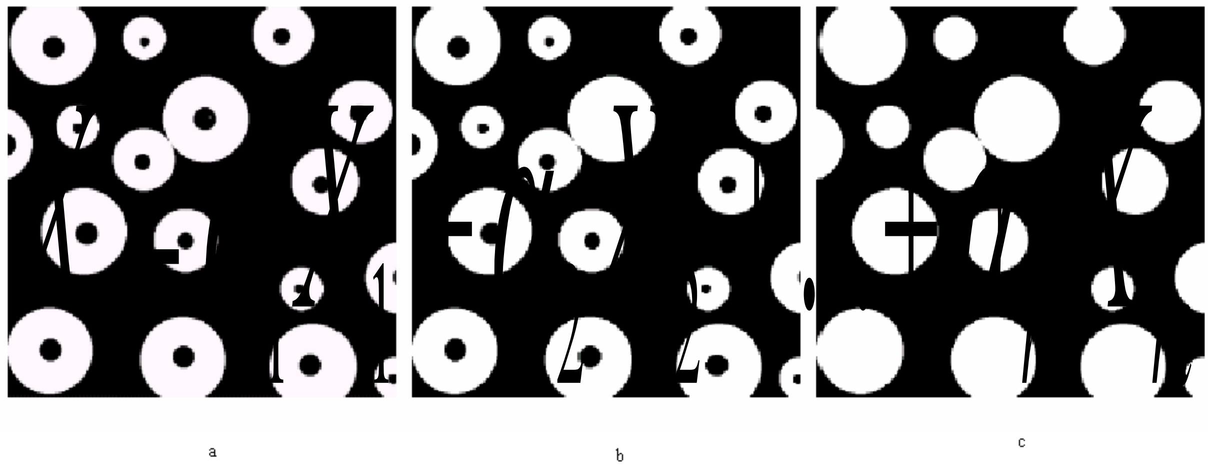
(5.30)

Z definície je zrejmé, že ide o iteračný postup. Proces vyplnenia si ukážeme na príklade, ktorý je na obr. 5.24. Na obr. 5.24 (a) je bodová množina A, ktorá svojimi bodmi ohraničuje oblasť. Táto ohraničená oblasť pozostáva z bodov pozadia, úlohou našej operácie „vyplnenie“ bude premeniť tieto body na body objektu. Podľa definície budeme potrebovať komplementárnu bodovú množinu, je zobrazená na obr. 5.24 (b). Štrukturálny element, ktorý použijeme, je na obr. 5.24 (c). Pri tejto morfologickej operácii je potrebné poznať jeden bod z oblasti, ktorú ideme vypĺňať. Nazvime ho začiatočný bod a označme ho p. Zvolený bod je na obr. 5.24 (d). Platí nasledovná rovnosť $X_0 = p$. Teraz už stačí postupovať podľa definície. Na obr. 5.24 (d) až (h) sú niektoré medzikroky operácie vyplnenia oblasti. Proces vyplnenia sa zastaví, keď nastane situácia $X_k = X_{k-1}$. V našom príklade táto situácia nastala pri X_7. Posledným krokom je vykonanie zjednotenia X_7 s pôvodnou bodovou množinou A. Výsledok je na obr. 5.24 (i).



Obr. 5.24 (a)Bodová množina A; (b)komplementárna bodová množina A^c; (c) štrukturálny element B; (d)-(h)iteračné kroky;(i) vyplnená oblasť

V našom príklade sme mali k dispozícii bodovú množinu, ktorá ohraničovala jednu oblasť (vytvorila jednu podmnožinu). Táto operácia je vhodná aj na vyplnenie objektov, kde je vytvorených viac podmnožín. Takúto situácia ilustruje obr. 5.25.

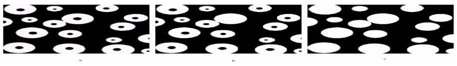


Obr. 5.25 (a)Bodová množina A; (b)vyplnenie jednej oblasti; (c)vyplnenie viacerých oblastí

Convex hull

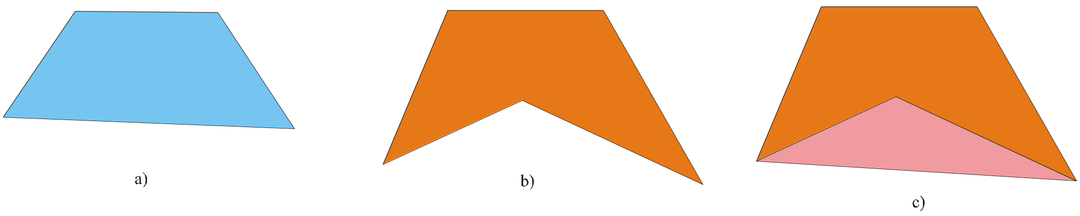
Táto morfologická operácia slúži na vytvorenie konvexného obalu množiny bodov. Predtým než uvedieme definíciu tejto množiny, vysvetlíme si čo je kovexný obal a konvexná množina.

Bod $X \in E_n$ nazývame konvexnou kombináciou bodov $X_{1,} X_2, \ldots X_m \in E_n$ ak platí

 (5.31)

, kde $\alpha_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Podmnožinu $S \subset E_n$ nazývame konvexnou, ak pre každé dva body platí $X_1, X_2 \in S$ a $\alpha \in (0,1)$, platí, že bod $X = \alpha_1 X_1 + (1-\alpha) X_2 \in S$ t.j. konvexná kombinácia ľubovoľných dvoch bodov z množiny *S* tiež patrí do množiny *S.*



Obr.5.26a: (a)Konvexná množina; (b)nekonvexná množina; (c)vytvorenie konvexnej množiny z nekonvexnej

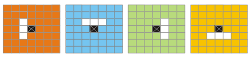
Konvexný obal je podľa definície najmenšia konvexná množina nad S. Morfologická operácia na vytvorenie konvexného obalu množiny A pozostáva z niekoľkých krokov. Opäť ide o iteračnú metódu, ktorá využíva rotačné štrukturálne elementy.

$$C(A) = \bigcup_{i=1}^{4} D^i$$

Obr. 5.26b Rotačný štrukturálny element otáčajúci sa o 90 stupňov

$$\{B\} = B^1, B^2, B^3, B^4$$

Pomocou každého štrukturálneho elementu sa vykoná nasledovný iteračný postup:



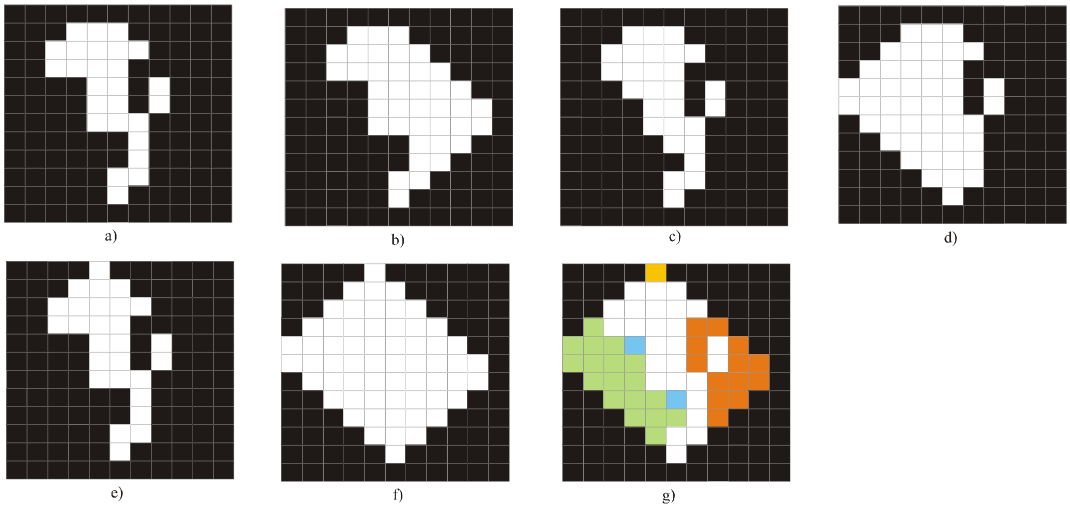
(5.32)

kde $i = 1,2,3,4$ a $k = 1,2,3...$ a platí $X_0^i = A$.

Horný index i značí, ktorý štrukturálny element používame. Písmenom k číslujeme počet iterácií. Iterácia zastane vtedy, keď nastane rovnosť $X_k^i = X_{k-1}^i$.Túto podmnožinu môžeme označiť ako D^i. Výsledok, teda už konvexnú bodovú množinu A, dostaneme zjednotením týchto podmnožín:

$$X_k^i = \left(X * B^i\right) \cup A \tag{5.33}$$

Príklad na nájdenie konvexného obalu bodovej množiny je na obr. 28. Bodová množiná, ktorej konvexný obal chceme nájsť je na obr. 28(a). Jednotlivé podmnožiny, ktoré sa vytvorili pomocou štyroch rotačných štrukturálnych elementov sú na obr. 28. (b) až (e). Na obr.28(e) vidíme výslednú, už konvexnú množinu A. Na obr. 28(f) sú farebne zvýraznené body, ktoré znázorňujú, ktoré body sme dostali pomocou ktorého štrukturálneho elementu.



Obr. 5.28 (a)Bodová množina A; (b)-(e) iteračné kroky; (f)vytvorená konvexná množina;(g) znázornenie, ktoré body boli nájdené pomocou,ktorého štrukturálneho elementu

Pruning

Je technológia, ktorá sa používa v digitálnom spracovaní obrazov, je založená na matematickej morfológii. Používa sa ako doplnok k operáciám skeletovania a stenčovania. V dôsledku nehomogénneho tvaru objektov sa môžu po aplikácii týchto dvoch operácií vyskytovať vo výslednom obraze „parazitické“ komponenty. Technológia pruning sa používa na odstránenie týchto bodov. Hlavné využitie pruningu je najmä pri rozpoznávaní písaného textu. Pri tejto operácii je vždy predpoklad, že dĺžka „nežiadúcich“ komponentov nie je dlhšia ako určitý počet bodov. Hlavnou podstatou fungovania pruningu je totiž odstraňovanie vetiev kratších ako tento daný počet bodov.

Pruning sa skladá z nasledovných krokov:

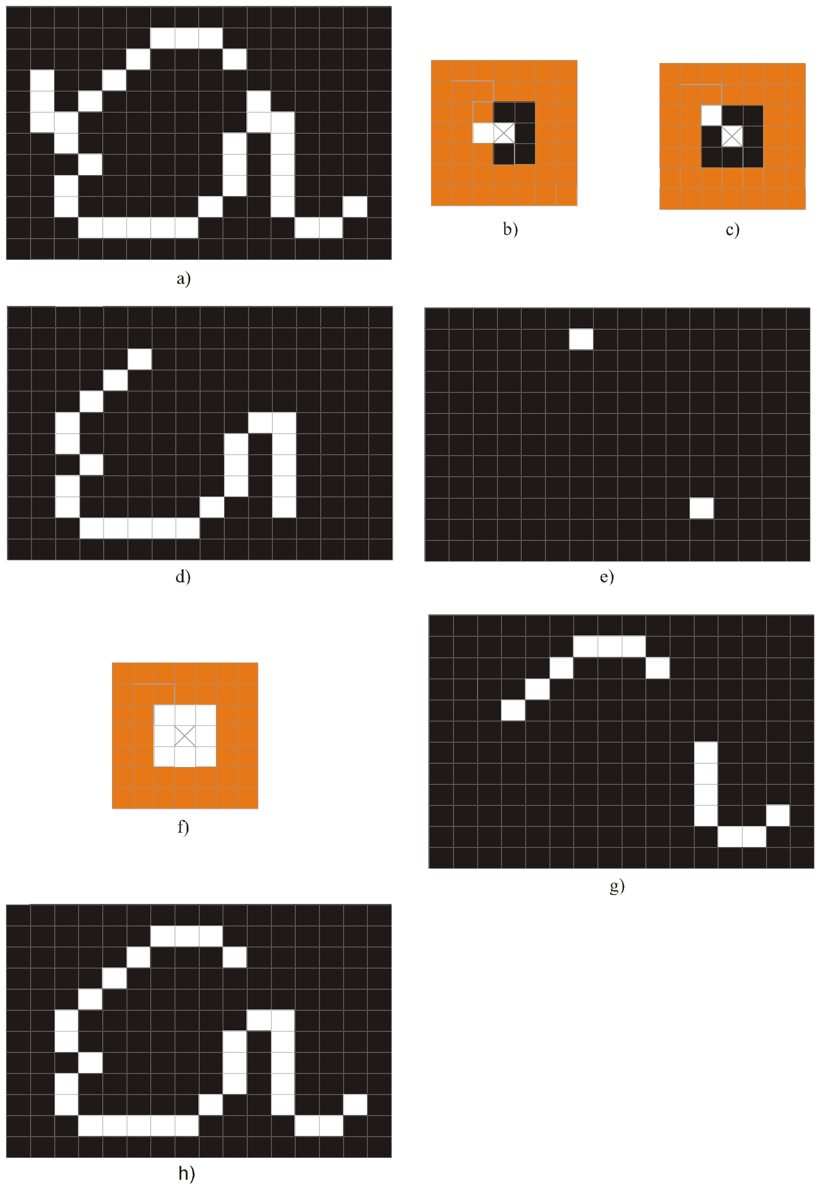
$$X_1 = A \otimes \{B\} \tag{5.34}$$

$$X_2 = \bigcup_{k=1}^{8} \left(X_1 * B^k\right) \qquad (5.35.)$$

$$X_3 = \left(X_2 \oplus H\right) \cap A \qquad (5.36.)$$

$$X_4 = X_1 \cup X_3 \qquad (5.37.)$$

Aj pri tejto operácii si ukážeme názorný príklad, vidíme ho na obr. 5.29. Na obr. 5.29 (a) vidíme bodovú množinu v tvare písaneho písmena a. Najprv sa vykoná sekvenčné stenčovanie pomocou dvoch rotačných štrukturálnych elementov, ktoré vidíme na obr. 5.29 (b) resp. 5.29 (c). Výsledok stenčovania je na obr. 5.29 (d). Po vykonaní stenčovania prejdeme na druhý krok, na nájdenie koncových bodov stenčenej množiny. Koncové body nájdeme pomocou operácie hit or miss. Nájdené koncového body našej stenčenej bodovej množiny sú zobrazené na obr. 5.29 (e). Po vykonaní tohto kroku môžeme prejsť na dilatáciu koncových bodov pomocou štrukturálneho elementu H a vykonať prienik tejto množiny s pôvodnou bodovou množinou. Štrukturálny element H je na obr. 5.29(f). Výsledok tohto kroku je zobrazený na obr. 5.29 (g). Na záver sa výkon zjednotenie výsledkov prvého a tretieho kroku. Výsledok pruningu je na obr. 5.29 (h).



Obr. 5.29 (a)Bodová množina A; (b) $\{B\} = B^1, B^2, B^3, B^4$; (c) $\{B\} = B^5, B^6, B^7, B^8$;(d) výsledok stenčenia A; (e) koncové body stenčeného obrazu; (f) koncové body stenčeného obrazu; (f) štrukturálny element H; (g) dilatácia koncových bodov stenčeného obrazu štrukturálnym elementom H; (g) výsledok pruningu

Prehľad binárnych morfologických operácií

V tabuľke 5.1 je jednoduchý prehľad všetkých morfologických operácií vysvetlených v kap. 5.

tabulka 5.1: prehľad morfologických operáciív

Operácia	Definícia	Popis
Dilatácia	$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b$	zväčšuje objekty, zapĺňa malé diery a úzke zálivy
Erózia	$A \Theta B = \bigcap_{b \in \hat{B}} A + b$	zjednodušenie štruktúry objektu, odstránenie malých nežiadúcich objektov, hľadanie obrysov objektu
Otvorenie	$A \circ B = (A \Theta B) \oplus B$	zachováva približné rozmery pôvodného objektu, zjednodušuje objekt, vyhladzuje objekt, oddeľuje objekty spojené úzkou čiarou
Uzavretie	$A \bullet B = (A \oplus B) \Theta B$	zjednodušuje objekt, zapĺňa malé diery a úzke zálivy, spája objekty, ktoré sú blízko seba
Hit or miss	$A * B = \{a : B_1(a) \subset A \wedge B_2(a) \subset A^C\}$	používa sa na hľadanie rohov objektov, je súčasťou operácie stenčovania
Stenčovanie	$A \otimes B = A - (A * B)$	stenčuje objekty
Zhrubnutie	$A \mathrm{O} B = A \cup (A * B)$	zhrubuje objekty
Hľadanie hrán objektov	$\partial(A) = A - (A \Theta B)$	používa sa na nájdenie obrysov objektu
Skeletovanie	$S(A) = \bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)$ $S_k(A) = \bigcup_{k=0}^{K} \{(A \Theta kB) - [(A \Theta kB) \circ B]\}$	vytvorí kostru objektu
Extrakcia spojitých komponentov	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \;, k = 1,2,3\ldots$ $X_0 = p$	po zadaní jedného bodu p spojitého objektu,nájde všetky ostatné body objektu
Vyplnenenie oblastí	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^C, k = 1,2,3\ldots$ $X_0 = p$	po zadaní jedného bodu p vyplní ohraničenú oblasť

Convex hull	$X_k^i = \left(X * B^i\right) \cup A \quad i = 1,2,3,4$ $k = 1,2,3\ldots$ $X_0^i = A \qquad D^i = X_{conv}^i$ $C(A) = \bigcup_{i=1}^{4} D^i$	vytvorí konvexmý obal množiny
Pruning	$X_1 = A \otimes \{B\}$ $X_2 = \bigcup_{k=1}^{8}\left(X_1 * B^k\right)$ $X_3 = \left(X_2 \oplus H\right) \cap A$ $X_4 = X_1 \cup X_3$	používa sa na odstránenie „parazitických“ komponentov