5.2. Morfologické operácie na monochromatických obrazoch

Pri jednotlivých operáciách budeme uvažovať diskrétne funkcie $f(n_1, n_2)$ a $b(n_1,n_2)$, kde

$f(n_1, n_2)$ je vstupný obraz,

$b(n_1,n_2)$ je štrukturálny prvok,

n_1,n_2 sú súradnice obrazu.

Pri monochromatických obrazoch funkcia *f* nadobúda hodnoty z intervalu <0,255>.

V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať nasledovnými morfologickými operáciami na monochromatických obrazoch: dilatácia, erózia, otvorenie, zatvorenie, vyhladenie, gradient.

Dilatácia monochromatického obrazu

Dilatácia monochromatického obrazu *f* štrukturálnym prvkom *b* je definovaná vzťahom *(1)*:

$$(f \oplus b)(s,t) = \max\{ f(s-n_1,t-n_2) + b(n_1,n_2);(s-n_1),(t-n_2) \in D_f;(n_1,n_2) \in D_b\} \quad (5.38)$$

kde

D_f je definičný obor vstupného obrazu *f* ,

D_b je definičný obor štrukturálneho prvku *b*.

Podmienka, že parametre posunutia $(s\text{-}n_1)$ a $(t\text{-}n_2)$ musia byť obsiahnuté v definičnom obore *f* analogicky vychádza z podmienky pre definíciu binárnej dilatácie, kde sa objekt spracovávaný morfologickou operáciou a štrukturálny prvok museli prekrývať aspoň v jednom bode obrazu. Rovnica dilatácie pripomína 2D konvolúciu, avšak tu operácia "maximum" nahrádza operáciu "sumy" v konvolúcii a "sčítanie" nahrádza "súčinom" v konvolúcii.

Načrtneme mechanizmus dilatácie ako jednoduchú 1D funkciu. Pre funkciu jednej premennej sa výraz redukuje na:

$$(f \oplus b)(s) = \max\{ f(s-n_1) + b(n_1) \mid (s-n_1) \in D_f, x \in D_b \} \qquad (5.39)$$

Vychádzame z poznatku konvolúcie, že *f(-x)* je jednoducho *f(x)* otočené vzhľadom na os *x*. Rovnako ako konvolúcii, funkcia *f(s-x)* sa posúva doľava pre kladné hodnoty *s* a doprava pre záporné hodnoty *s*. Z podmienky, že hodnota *(s-x)* musí byť z definičného oboru D_f a hodnota *x* z definičného oboru D_b vyplýva to, že *f* a *b* sa prekrývajú. Tieto podmienky sú analogické pre požiadavky v binárnej definícii dilatácie, kde sa dve hodnoty musia prekrývať v aspoň jednom elemente. Nakoniec, na rozdiel od binárneho prípadu, skôr posúvame obraz *f* ako štrukturálny prvok *b*. Rovnica (5.38*)* by mala byť napísaná tak, že sa posúva štrukturálny prvok *b* namiesto obrazu *f*. Avšak, ak D_b je menšie ako D_f (ako je to takmer vždy v praxi), táto forma rovnice je jednoduchšia v indexovaní a dáva rovnaký výsledok. Významovo v posúvaní obrazu *f* po štrukturálnom prvku *b* nie je skutočne žiaden rozdiel ako v posúvaní štrukturálneho prvku *b* po obraze *f*.

Dilatácia je komutatívna, takže pri výmene *f* a *b* môžeme rovnicu dilatácie využiť pri počítaní $b \oplus f$. Výsledok je rovnaký, ale štrukturálny prvok *b* je teraz posunutá funkcia. Avšak operácia erózie nie je komutatívna, takže zámena vo funkcii sa nemôže použiť. Rozdielny (a zložitejší) výraz vychádza z vytvorenia takej funkcie štrukturálneho prvku *b*, ktorá je posunutá v dilatácii i v erózii. Preto kvôli jednoduchosti používame výraz dilatácie vo forme *(5.38)*.

a) b)

Obr. 5.30 Dilatácia monochromatického obrazu štrukturálnym prvkom 5x5.
a) originál (256x256), b) dilatovaný monochromatický obraz

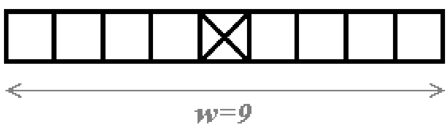
Pretože dilatácia je založená na vyberaní maxima zo súčtu *f* + *b* v okolí definovanom tvarom štrukturálneho prvku, hlavným efektom použitia dilatácie na monochromatických obrazoch je:

ak sú všetky hodnoty štrukturálneho prvku kladné,

1.) výstupný obraz sa javí jasnejší ako vstupný,

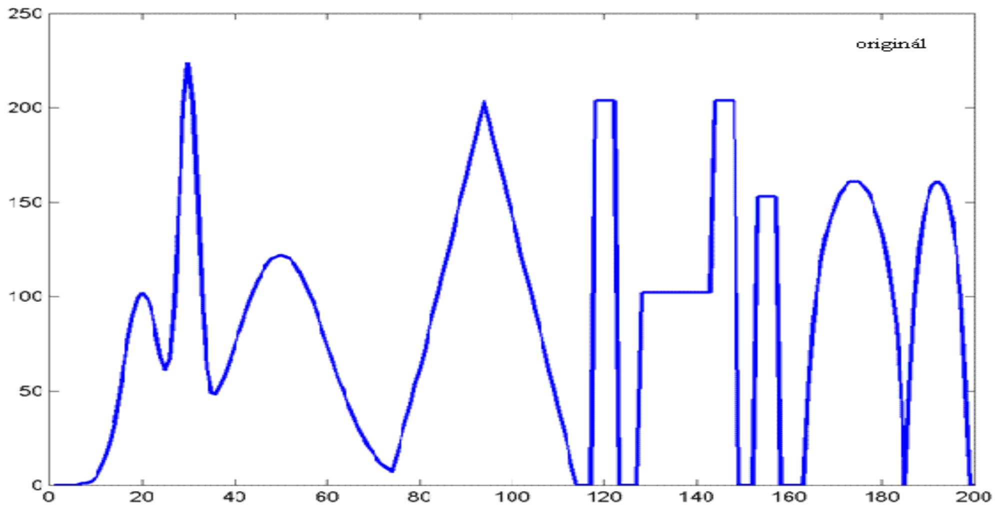
2.) tmavé detaily sú buď redukované alebo úplne eliminované v závislosti od hodnôt a tvarovej zhody so štrukturálnym prvkom použitým na dilatáciu.

Nasledujúci príklad pre lepšie pochopenie zobrazuje operáciu dilatácie $f \oplus b$ aplikovanú na jednom riadku monochromatického obrazu horizontálnym štrukturálnym prvkom dĺžky 9 obrazových bodov.

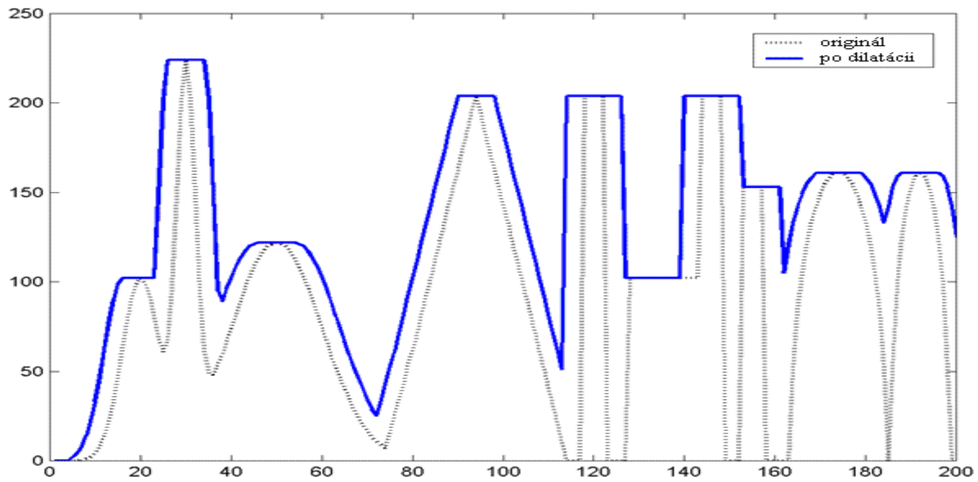


Obr. 5.31 Horizontálny štrukturálny prvok dĺžky 9 obrazových bodov.

Na *x*-ovej osi je zobrazená veľkosť obrazu v obrazových bodoch a na *y*-ovej osi hodnoty jasu.



a)



b)

Obr. 5.32 Dilatácia na jednom riadku monochromatického obrazu.
a) originál, b) dilatácia na riadku monochromatického obrazu [GoW92]

Monochromatická dilatácia s plochým štrukturálnym prvkom

Dilatácia monochromatického obrazu *f* štrukturálnym prvkom *b* je definovaná vzťahom:

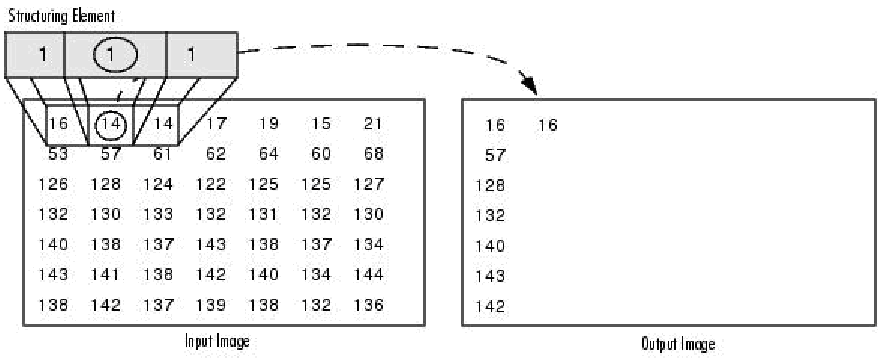
$$(f \oplus b)(s,t) = \max\{f(s-n_1, t-n_2) + b(n_1, n_2)\} \qquad (5.40)$$

pre $(s-n_1),(t-n_2) \in D_f ; (n_1, n_2) \in D_b$,

kde D_f je definičný obor vstupného obrazu *f*,

D_b je definičný obor štrukturálneho prvku *b*.

Pri monochromatickej dilatácii s využitím plochého štrukturálneho prvku sa tento presúva po celom vstupnom obraze a vyhodnocuje sa hodnota každého obrazového bodu krok za krokom podľa definície morfologickej dilatácie. Takto získané hodnoty postupne vytvárajú výstupný obraz, ako je znázornené na *obr.5.33*.

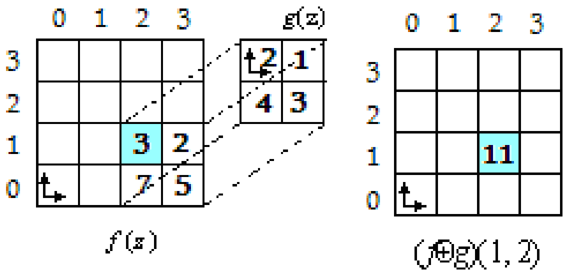


Obr. 5.33 Monochromatická dilatácia s plochým štrukturálnym prvkom.

Na *obr.5.33* je znázornený priebeh dilatácie s plochým štrukturálnym prvkom, ktorá je vykonávaná podľa vzťahu *(5.40.)*. Na prvý pohľad by mohol nastať rozpor medzi definíciou a obrázkom. Je dôležité preto upozorniť, že pri plochom štrukturálnom prvku je definovaný iba tvar (okolie) štrukturálneho prvku a nie jeho hodnoty (ktoré si v tomto prípade môžeme predstaviť ako nuly, hoci na obrázku je tvar štrukturálneho prvku definovaný jednotkami). Preto výsledné hodnoty jednotlivých obrazových bodov sú maximom pre dané okolie hoci dilatácia je súčtom obrazových bodov vstupného obrazu a bodov štrukturálneho prvku.

Monochromatická dilatácia so všeobecným štrukturálnym prvkom

Pri monochromatickej dilatácii (obr. 5.34), zmenou štrukturálneho prvku na všeobecný, môžeme dosiahnuť to, že výstupný obraz bude natoľko dilatáciou zosvetlený, že stratíme informáciu o obraze. Preto je dôležité, pri definovaní všeobecného štrukturálneho prvku vhodne voliť úroveň intenzity jeho bodov.



Obr. 5.34 Monochromatická dilatácia so všeobecným štrukturálnym prvkom [Kuos95]

Erózia monochromatického obrazu

Erózia monochromatického obrazu *f* štrukturálnym prvkom *b* je definovaná vzťahom :

$$(f\Theta b)(s,t) = \min\{ f(s+n_1, t+n_2) - b(n_1,n_2); (s+n_1),(t+n_2) \in D_f; (n_1,n_2) \in D_b \} \tag{5.41}$$

kde D_f je definičný obor vstupného obrazu *f*,

D_b je definičný obor štrukturálneho prvku *b.*

Podmienka, že parametre posunutia $(s+n_1)$ a $(t+n_2)$ musia byť obsiahnuté v definičnom obore D_f analogicky vyplýva z podmienky pre definíciu binárnej erózie, kde štrukturálny prvok musel byť kompletne obsiahnutý množinou bodov obrazu s ktorou erodoval. Rovnica erózie (5.41.) pripomína 2D koreláciu, avšak tu "*minimum*" nahrádza "*sumu*" v korelácii a "*odčítanie*" nahrádza "*násobenie*" v korelácii.

Načrtneme mechanizmus erózie jednoduchej 1D funkcie. Pre funkciu jednej premennej sa výraz erózie redukuje na:

$$(f\Theta b)(s) = \min\{ f(s+n_1) - b(n_1); (s+n_1) \in D_f ; n_1 \in D_b \} \qquad (5.42)$$

Ako i v korelácii, funkcia *f(s-n₁)* sa posúva doľava pre kladné *s* a doprava pre záporné *s*. Požiadavky, že $(s+n_1) \in D_f, n_1 \in D_b$ implikujú, že hranice štrukturálneho prvku *b* sú kompletne obsiahnuté hranicami posunutej funkcie *f*. Požiadavky sú analogické pre binárnu definíciu erózie. Podobne ako pri predchádzajúcom príklade zjednodušenia výrazu pre dilatáciu i tu z rovnakých dôvodov využívame rovnicu erózie v tvare *(5.42.)*.

a) b)

Obr. 5.35 Erózia monochromatického obrazu štrukturálnym prvkom 5x5.
a) originál (256x256), b) erodovaný monochromatický obraz

Erózia je založená na vyberaní minima z rozdielu *f* - *b* v okolí definovanom tvarom štrukturálneho prvku.

Hlavným efektom použitia erózie na monochromatických obrazoch je:

ak sú všetky hodnoty štrukturálneho prvku kladné,

1.) výstupný obraz sa javí tmavší ako vstupný,

2.) efekt svetlých detailov vo vstupnom obraze, ktoré sú svojimi rozmermi menšie ako štrukturálny prvok, je redukovaný. Stupeň redukcie je určený monochromatickou hodnotou obklopujúcou svetlý detail na obraze, tvarom a hodnotou amplitúdy samotného štrukturálneho prvku.

Dilatácia a erózia sú duálne vzhľadom na doplnok a súmernosť.

$$(f \Theta b)^c (n_1, n_2) = (f^c \oplus \hat{b})(n_1, n_2) \qquad (5.43)$$

kde $f^c = -f(n_1, n_2), \hat{b} = b(-n_1, -n_2)$.

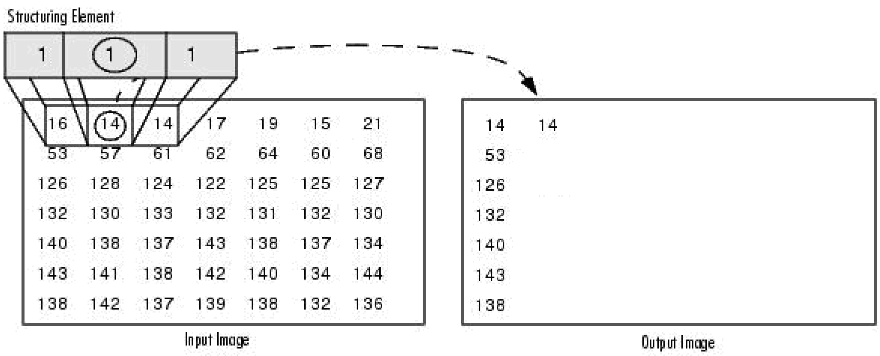
Monochromatická erózia s plochým štrukturálnym prvkom

Erózia monochromatického obrazu *f* štrukturálnym prvkom *b* je definovaná vzťahom *(11)*:

$$(f - b)(s,t) = \min\left\{ f(s+n_1, t+n_2) - b(n_1, n_2) \right\} \qquad (5.44)$$

pre $(s+n_1),(t+n_2) \in D_f ; (n_1, n_2) \in D_b$.

Pri monochromatickej erózii s využitím plochého štrukturálneho prvku sa tento presúva po celom vstupnom obraze a vyhodnocuje sa hodnota každého obrazového bodu podľa definície morfologickej erózie [2]. Takto získané hodnoty postupne vytvárajú výstupný obraz, ako je znázornené na obr.5.36.

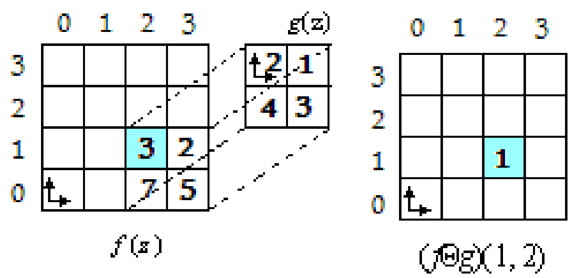


Obr. 5.36 Monochromatická erózia s plochým štrukturálnym prvkom [Kuos95].

Na *obr.* **5.36***.* je znázornený priebeh erózie s plochým štrukturálnym prvkom, ktorá je vykonávaná podľa vzťahu *(5.44.)*. Na prvý pohľad by mohol nastať rozpor medzi definíciou a obrázkom. Je dôležité preto upozorniť, že pri plochom štrukturálnom prvku je definovaný iba tvar (okolie) štrukturálneho prvku a nie jeho hodnoty (ktoré si v tomto prípade môžeme predstaviť ako nuly, hoci na obrázku je tvar štrukturálneho prvku definovaný jednotkami). Preto výsledné hodnoty jednotlivých obrazových bodov sú minimom pre dané okolie hoci erózia je rozdielom obrazových bodov vstupného obrazu a bodov štrukturálneho prvku.

Monochromatická erózia so všeobecným štrukturálnym prvkom

Pri monochromatickej erózii (*obr. 5.38*), zmenou štrukturálneho prvku na všeobecný, môžeme dosiahnuť to, že výstupný obraz bude natoľko eróziou stmavený, že stratíme informáciu o obraze. Preto je dôležité, pri definovaní všeobecného štrukturálneho prvku vhodne voliť úroveň intenzity jeho bodov.



Obr. 5.37 Monochromatická erózia so všeobecným štrukturálnym prvkom, [Kuos95]

Otvorenie monochromatického obrazu

Vyjadrenia pre otvorenie a zatvorenie monochromatických obrazov majú rovnakú formu ako pri binárnych operáciách.

Otvorenie monochromatického obrazu *f* štrukturálnym prvkom *b* je definované vzťahom *(5.45.)*:

$$f \circ b = (f \Theta b) \oplus b \qquad (5.45)$$

Otvorenie monochromatického obrazu štrukturálnym prvkom predstavuje eróziu s následnou dilatáciou práve erodovaného monochromatického obrazu.

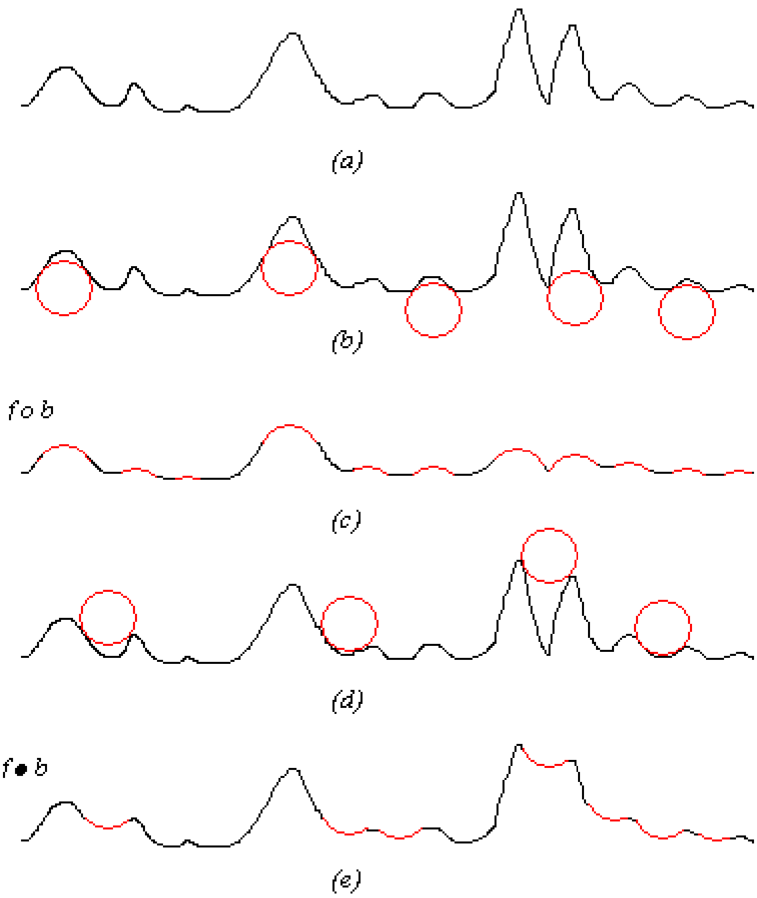
a)

b)

Obr. 5.38 Otvorenie monochromatického obrazu štrukturálnym prvkom 5x5.
a) originál (256x256), b) otvorený monochromatický obraz

Výsledkom otvorenia monochromatického obrazu je výsledný obraz, v ktorom sú čiastočne redukované alebo úplne odstránené malé svetlé detaily (výsledok erózie), pričom jas monochromatického obrazu zostal relatívne nezmenený (vďaka účinku následnej dilatácie).

Otvorenie obrazu má jednoduchú geometrickú interpretáciu. Predpokladáme, že vidíme obrazovú funkciu $f(n_1,n_2)$ v 3D perspektíve, kde n_1 a n_2 sú zvyčajné súradnice a tretiu os tvorí jas, ktorý je hodnotou funkcie $f(n_1,n_2)$. V tejto reprezentácii sa obraz javí ako diskrétny povrch, ktorého hodnota v ľubovoľnom bode so súradnicami (n_1,n_2) je $f(n_1,n_2)$. Teraz predpokladajme, že chceme otvoriť obraz f priestorovým guľovým štrukturálnym prvkom b a vidíme tento prvok ako "valiacu sa guľu" [GoW92]. Potom, mechanizmus otvorenia obrazu f štrukturálnym prvkom b môže byť interpretovaný geometricky ako proces tlačenia lopty proti spodnej strane povrchu. Otvorenie $f \circ b$ je potom povrch vytvorený z najvyšších bodov dosiahnutých hociktorou časťou oblasti štrukturálneho prvku ako sa posúva po celej spodnej časti povrchu f. Tento príklad znázorňuje obrázok *5.39*. Všetky ostré vrcholky s väčšou amplitúdou sa zmenšili a zaoblili vzhľadom na priemer valiacej sa gule. V praktickom využití to znamená, že otvorenie sa zvyčajne používa na odstránenie malých (vzhľadom na veľkosť štrukturálneho prvku) svetlých detailov, zatiaľ čo celková úroveň jasu ako i väčšie svetlé detaily zostali nezmenené. Počiatočná erózia odstránila malé detaily, ale taktiež i tmavosť obrazu. Následná dilatácia znovu zvýšila jas obrazu, ale bez toho, aby znovu obnovila detaily odstránené eróziou.



Obr. 5.39 Otvorenie a zatvorenie znázornené pre prípad "valiacej sa gule".[GoW92]
a) riadok monochromatického obrazu, b) rôzne pozície valiacej sa gule počas otvorenia, c) výsledok otvorenia, d) rôzne pozície valiacej sa gule počas zatvorenia, e) výsledok zatvorenia

Operácia otvorenia spĺňa nasledujúce vlastnosti:

$$(f \circ b) \dashv f \tag{5.46}$$

$$ak \;\; f_1 \dashv f_2 ,\, potom \; (f_1 \circ b) \dashv (f_2 \circ b) \tag{5.47}$$

$$(f \circ b) \circ b = f \circ b \tag{5.48}$$

Výraz $u \dashv v$ sa používa na označenie toho, že definičný obor funkcie *u* je podmnožinou definičného oboru funkcie *v* a tiež, že $u(x, y) \leq v(x, y)$ pre každé *(x,y)* z definičného oboru funkcie *u*.

Podmienka *(5.46.)* sa nazýva rastúca monotónnosť a rovnica *(5.47.)* je vlastnosť idempotencie, čo znamená, že po otvorení je obraz už otvorený. Ďalším otvorením sa už obraz nezmení.

Monochromatické otvorenie s plochým štrukturálnym prvkom

Otvorenie monochromatického obrazu f s plochým štrukturálnym prvkom b je definované už uvedeným vzťahom *(5.48).* Rovnako predstavuje eróziu s následnou dilatáciou práve erodovaného monochromatického obrazu. Výsledok operácie záleží od vstupného obrazu a veľkosti a tvaru štrukturálneho prvku.

Monochromatické otvorenie so všeobecným štrukturálnym prvkom

Otvorenie monochromatického obrazu f so všeobecným štrukturálnym prvkom b je definované už uvedeným vzťahom *(8).* Rovnako predstavuje eróziu s následnou dilatáciou práve erodovaného monochromatického obrazu. Výsledok operácie záleží od vstupného obrazu a veľkosti a tvaru štrukturálneho prvku.

Zatvorenie monochromatického obrazu

Zatvorenie monochromatického obrazu f štrukturálnym prvkom b je definované vzťahom :

$$f \bullet b = (f \oplus b)\Theta b \tag{5.49}$$

Zatvorenie monochromatického obrazu štrukturálnym prvkom predstavuje dilatáciu s následnou eróziou práve dilatovaného monochromatického obrazu.

a) b)

Obr. 5.40 Zatvorenie monochromatického obrazu štrukturálnym prvkom 5x5.
a) originál (256x256), b) zatvorený monochromatický obraz

Výsledkom zatvorenia monochromatického obrazu je výsledný obraz, v ktorom sú čiastočne redukované alebo úplne odstránené malé tmavé detaily (výsledok dilatácie), pričom jas monochromatického obrazu zostal relatívne nezmenený (vďaka účinku následnej erózie).

Otvorenie a zatvorenie pre monochromatické obrazy sú duálne.

$$(f \bullet b)^c = f^c \circ \hat{b} \text{ alebo } -(f \bullet b) = -f \circ \hat{b} \qquad (5.50)$$

Na obrázku *(*. **5.39** *d.))* a *(*. **5.39**. *e.))* je znázornený výsledok zatvorenia obrazu *f* štrukturálnym prvkom *b*. Tu sa guľa posúva po hornej strane povrchu a vrcholky sú v podstate zachované v pôvodnom tvare (teda pokiaľ vzdialenosť medzi dvoma vrcholmi nie je menšia ako priemer gule). V praktickom využití to znamená, že zatvorenie sa zvyčajne používa na odstránenie tmavých detailov obrazu, zatiaľ čo svetlé detaily zostali nezmenené. Počiatočná dilatácia odstránila tmavé detaily a zjasnila obraz a následná erózia stmavila obraz ale bez toho, aby znovu obnovila detaily odstránené dilatáciou.

Operácia zatvorenia spĺňa nasledujúce vlastnosti:

$$f \dashv (f \bullet b) \qquad (5.51)$$

$$ak\ f_1 \dashv f_2,\ potom\ (f_1 \bullet b) \dashv (f_2 \bullet b) \qquad (5.52)$$

$$(f \bullet b) \bullet b = f \bullet b \qquad (5.53)$$

Výraz $u↲v$ sa používa na označenie toho, že definičný obor *u* je podmnožinou definičného oboru *v* a tiež, že $u(x, y) \leq v(x, y)$ pre každé *(x, y)* z definičného oboru *u*.

Podmienka *(5.51.)* sa nazýva rastúca monotónnosť a rovnica *(5.52)* je vlastnosť idempotencie, čo znamená, že po zatvorení je obraz už zatvorený.

Monochromatické zatvorenie s plochým štrukturálnym prvkom

Zatvorenie monochromatického obrazu *f* s plochým štrukturálnym prvkom *b* je definované už uvedeným vzťahom *(5.53).* Rovnako predstavuje dilatáciu s následnou eróziou práve dilatovaného monochromatického obrazu. Výsledok operácie záleží od vstupného obrazu a veľkosti a tvaru štrukturálneho prvku.

Monochromatické zatvorenie so všeobecným štrukturálnym prvkom

Zatvorenie monochromatického obrazu *f* so všeobecným štrukturálnym prvkom *b* je definované už uvedeným vzťahom *(5.53).* Rovnako predstavuje dilatáciu s následnou eróziou práve dilatovaného monochromatického obrazu. Výsledok operácie záleží od vlastností vstupného obrazu a veľkosti a tvaru štrukturálneho prvku.

Vyhladenie monochromatického obrazu

Morfologické vyhladenie predstavuje istý spôsob aplikácie spomenutých základných morfologických operácií dilatácie, erózie, otvorenia a zatvorenia. Morfologické vyhladenie označuje otvorenie nasledované zatvorením.

a) b)

Obr. 5.41 Vyhladenie monochromatického obrazu štrukturálnym prvkom 5x5.
a) originál (256x256), b) vyhladený monochromatický obraz

Výsledkom týchto dvoch operácií je odstránenie alebo zmenšenie svetlých i tmavých nežiaducich prvkov alebo šumu na obraze.

Taktiež, s ohľadom na druh štrukturálneho prvku, môžeme operáciu vyhladenia rozdeliť na monochromatické vyhladenie s plochým štrukturálnym prvkom a monochromatické vyhladenie so všeobecným štrukturálnym prvkom.

Gradient monochromatického obrazu

Morfologický gradient predstavuje ďalší spôsob aplikácie spomenutých základných morfologických operácií. Gradient je spojením dilatácie a erózie. Definovaný je vzťahom:

$$g = (f \oplus b) - (f \Theta b) \tag{5.54}$$

Gradient slúži sa nájdenie hraníc objektov na obraze. Taktiež, s ohľadom na druh štrukturálneho prvku, môžeme operáciu gradient rozdeliť na gradient monochromatického obrazu s plochým štrukturálnym prvkom a gradient monochromatického obrazu so všeobecným štrukturálnym prvkom.

a) b)

Obr. 5.42 Gradient monochromatického obrazu štrukturálnym prvkom 5x5.

a) originál (256x256), b) gradient monochromatického obrazu

Operácie Top-hat a Bottom-hat

Operácie morfologické otvorenie a uzavretie je možné ďalej použiť na vykonanie nasledujúcich transformácii obrazu:

- top-hat transformácia je definovaná ako rozdiel hodnôt pôvodného obrazu a obrazu vzniknutého po aplikácii morfologického otvorenia, dochádza k zachovaniu maxím obrazu.

- bottom-hat transformácia je definovaná ako rozdiel hodnôt obrazu vzniknutého po aplikácii morfologického uzavretia a pôvodného obrazu, dochádza k zachovaniu miním obrazu.

Operácia rekonštrukcie obrazu

Ďalšou používanou operáciou matematickej morfológie je morfologická rekonštrukcia. Táto metóda požíva dva obrazy, marker a masku k vytvoreniu finálneho rekonštruovaného obrazu (nepoužíva sa štruktúrny element). Obraz marker je použitý ako "vstupný bod" rekonštrukcie, ktorej úlohou je priblíženie sa hodnotám masky a obnoveniu niektorých častí odstránených napríklad v predchádzajúcich krokoch filtrácie z obrazu marker.