8.1. Priestorová interpolácia

Vzorkovaním pomocou ideálneho A/D prevodníka dostaneme z analógového signálu $f_c(x,y)$ diskrétny signál $f(n_1,n_2)$:

$$f(n_1,n_2) = f_c(x,y)\Big|_{x=n_1T_1,\, y=n_2T_2} \qquad (8.1)$$

Spätnú rekonštrukciu analógového signálu $f_c(x,y)$ môžeme pri splnení Nyquistovho kritéria zrealizovať pomocou D/A prevodníka podľa vzťahu

$$f_c(x,y) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1,n_2)h(x-n_1T_1, y-n_2T_2) \qquad (8.2)$$

kde $h(x,y)$ je impulzová odpoveď ideálneho separovateľného dolnopriepustného analógového filtra a platí

$$h(x,y) = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{T_1}x\right)}{\dfrac{\pi}{T_1}x} \cdot \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{T_2}y\right)}{\dfrac{\pi}{T_2}y} \qquad (8.3)$$

To teoreticky vyzerá veľmi jednoducho. Ale **problém** celého postupu je v tom, že $h(x,y)$ je časovo (keby bola funkcia jednorozmerná), resp. v našom prípade priestorovo (keďže obrazová funkcia je dvojrozmerná) neohraničená funkcia a teda výpočet $f_c(x,y)$ použitím uvedeného vzťahu je prakticky nerealizovateľný.

RIEŠENIE: použijeme len funkciu konečných rozmerov a spravíme

APROXIMÁCIU *INTERPOLÁCIE* $\qquad \boldsymbol{f_c(x,y) \rightarrow \hat{f}_c(x,y)}$

Napr.: použijeme dolno-priepustný filter, ktorého $h(x,y)$ je ohraničená v priestore a platí, že suma vo vzorci **(8.2)** má konečný počet nenulových členov.

Najjednoduchšia interpolačná funkcia dopočítava ďalšie body obrazu jednoduchým opakovaním bodov okolia. Hovoríme o interpolácii nultého rádu.

INTERPOLÁCIA NULTÉHO RÁDU

Ak $h(x, y)$ bude obdĺžniková oknová funkcia daná vzťahom

$$h(x, y) = 1 \qquad \text{pre:} -\frac{T_1}{2} \le x \le \frac{T_1}{2},\ -\frac{T_2}{2} \le y \le \frac{T_2}{2} \qquad (8.4)$$

– za hodnotu $\hat{f}_c(x, y)$ zvolíme hodnotu $f(n_1, n_2)$ v najbližšom obrazovom bode

originál: 64x64 interpolácia: 256x256

Obr. 8.1. interpolácii nultého rádu

BILINEÁRNA INTERPOLÁCIA

Už z názvu vyplýva, že ide o zložitejšiu funkciu. Hodnoty $f_c(x, y)$ vypočítame ako lineárnu kombináciu hodnôt $f(n_1, n_2)$

zo štyroch najbližších okolitých bodov:

chceme vypočítať $f(x, y)$ pre $n_1T_1 \le x \le (n_1+1)T_1$ a $n_2T_2 \le y \le (n_2+1)T_2$.

Interpolovaná funkcia $\hat{f}_c(x, y)$ pomocou bilineárnej interpolácie bude:

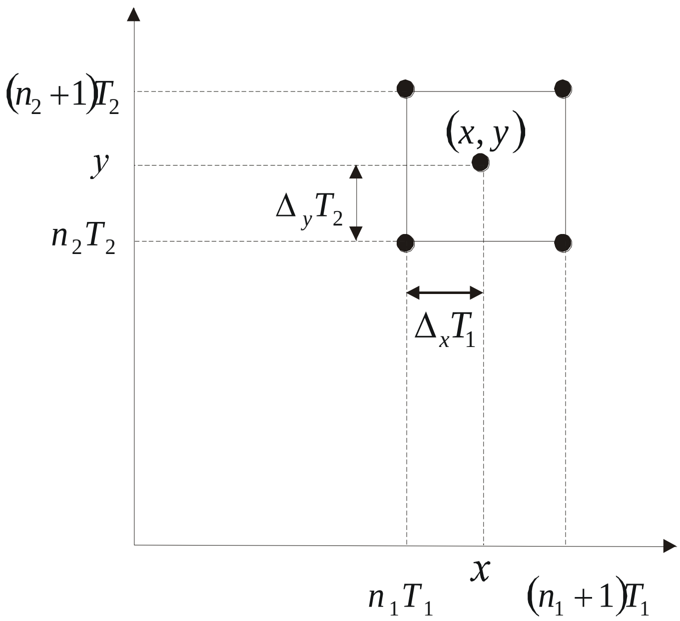
$$\begin{aligned}\hat{f}_c(x, y) = {} & (1-\Delta_x)(1-\Delta_y) f(n_1, n_2) + (1-\Delta_x)\Delta_y f(n_1, n_2+1) + \\ & + \Delta_x(1-\Delta_y) f(n_1+1, n\ ) + \Delta_x\Delta_y f(n_1+1, n_2+1)\end{aligned} \tag{8.5}$$

kde

$$\Delta_x = (x - n_1T_1)/T_1$$

$$\Delta_y = (y - n_2T_2)/T_2$$

Výpočet ilustruje nasledujúci obrázok (Obr.8.2)



Obr. 8.2. Výpočet bilineárnej interpolácie

Ide vlastne o váhovaný priemer 4 okolitých bodov.

Ak leží dopočítavaný bod (x, y) v strede (ako na obrázku), potom sú všetky váhy rovnaké: ¼ a interpolácia $f_c(x, y)$ pomocou hodnôt štyroch susedných bodov

$$f(n_1T_1, n_2T_2),$$
$$f((n_1+1)T_1, n_2T_2),$$
$$f(n_1T_1, (n_2+1)T_2),$$
$$f((n_1+1)T_1, (n_2+1)T_2) \qquad (8.6)$$

Ak máme diskrétny obraz, výpočet je nasledovný:
PRIEMERNÁ HODNOTA OKOLITÝCH BODOV - najjednoduchší spôsob

$$y = \frac{1}{4}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right) \qquad \text{kde} \qquad \begin{array}{ccc} & x_1 & \\ x_2 & y & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \qquad (8.7)$$

Iná možnosť je výpočet mediánu okolitých bodov:
MEDIÁN –DISKRÉTNA INTERPOLÁCIA

A) majme mediánový filter veľkosti 2x2 definovaný nasledovne:

$$y = med\left(x_1, x_2, x_3, x_4, \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\right) \qquad (8.8)$$

MEDIÁN je prostredná hodnota z usporiadanej postupnosti úrovní jasu a ich priemernej hodnoty po usporiadaní podľa veľkosti

V príp. dvojnásobnej interpolácie môžeme použiť medián v 2 krokoch pre postupný výpočet rekonštruovaného obrazu : v 1. kroku vypočítame y_i a
v 2. kroku zostávajúce body

$\boldsymbol{x}_1$	.	$\boldsymbol{x}_2$	.	$\boldsymbol{x}_3$
.	$\boldsymbol{y}_1$	.	$\boldsymbol{y}_2$	.
$\boldsymbol{x}_4$	.	$\boldsymbol{x}_5$	.	$\boldsymbol{x}_6$
.	$\boldsymbol{y}_3$	.	$\boldsymbol{y}_4$	.
$\boldsymbol{x}_7$	.	$\boldsymbol{x}_8$	.	$\boldsymbol{x}_9$

POLYNOMICKÁ INTERPOLÁCIA

Majme oblasť na obraze rozmerov 3x3 alebo 5x5 obrazových bodov, z ktorých chceme aproximovať $f(x,y)$ pomocou polynómu.

Interpolovaný obraz $\hat{f}_c(x,y)$ je daný vzťahom

$$\hat{f}_c(x,y) = \sum_{i=1}^{N} S_i \cdot \phi_i(x,y) \tag{8.9}$$

kde $\phi_i(x,y)$ sú členy polynómu, resp. elementárne polynómy.

Napríklad pre $N = 6$ máme

$$\phi_i(x,y): 1, x, y, x^2, y^2, xy \tag{8.10}$$

Koeficienty S_i môžeme určiť minimalizovaním chyby interpolácie - výrazu

$$Chyba = \sum_{(n_1,n_2)\in\psi} \sum \left[f(x,y) - \sum_{i=1}^{N} S_i \phi_i(x,y) \right]^2 \Bigg|_{x=n_1T_1,\, y=n_2T_2} \tag{8.11}$$

ψ je oblasť bodov, pomocou ktorých obraz $f(x,y)$ aproximujeme

Výhoda polynomickej interpolácie:

- výsledný obraz $\hat{f}_c(x,y)$ je „hladký"
- rovnako výpočty parciálnych derivácií $\partial\hat{f}_c(x,y)/\partial x$ a $\partial\hat{f}_c(x,y)/\partial y$ sú jednoduché - používajú sa napríklad aj v takých aplikáciách, ako sú detekcia hrán a odhad pohybu.

Nevýhoda polynomickej interpolácie je v tom, že so zvyšujúcim sa rádom polynómu sa výstupný obraz „rozvlní"

Obr.8.3. Bikubická interpolácia: (a) originál, (b) viditeľné zvlnenie obrazu vplyvom bikubickej interpolácie (3.rádu)

Interpoláciu môžeme vnímať ako DP filtáciu obrazu.

Interpolačné metódy sa líšia typom použitého filtra.